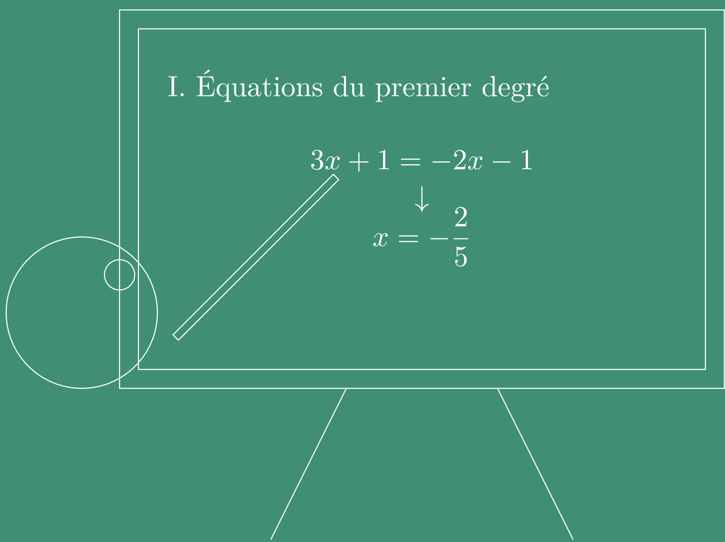
Leçons CAPES

Propositions de plans et de contenu pour les Leçons à l'Oral du CAPES de Mathématiques, session 2023

Clément Boulonne



Collection CAPES

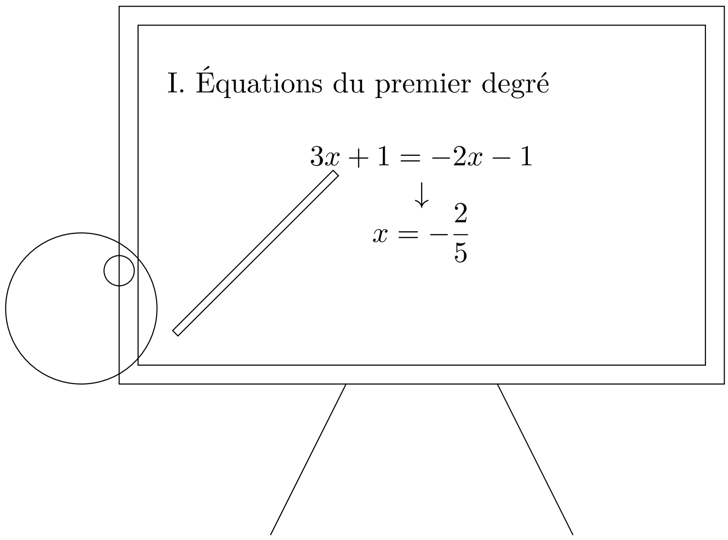
Version 20230420

Leçons CAPES

Propositions de plans et de contenu pour les Leçons à l'Oral du CAPES de Mathématiques, session 2023

Clément Boulonne

CBMaths



Collection CAPES

Version 20230420

Table des matières

Liste des leçons pour la session 2023

Avertissement

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique. Il est attendu du candidat un exposé faisant une synthèse sur le sujet choisi, sous la forme d'un plan d'étude hiérarchisé et détaillé, qui devra comprendre des exemples et des applications permettant d'illustrer ce sujet.

1. Exemples de dénombrements dans différentes situations.
2. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
3. Variables aléatoires discrètes.
4. Variables aléatoires réelles à densité.
5. Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données.
6. Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$, nombres premiers.
7. PGCD et PPCM dans $\mathbb{Z}$.
8. Congruences dans $\mathbb{Z}$.
9. Différentes écritures d'un nombre complexe.
10. Utilisation des nombres complexes en géométrie.
11. Trigonométrie.
12. Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère.
13. Droites et plans dans l'espace.
14. Transformations du plan. Frises et pavages.
15. Relations métriques et angulaires dans le triangle.
16. Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes.
17. Périmètres, aires, volumes.
18. Exemples de résolution de problèmes de géométrie plane à l'aide des vecteurs.
19. Produit scalaire dans le plan.
20. Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.
21. Problèmes de constructions géométriques.
22. Exemples de problèmes d'alignement, de parallélisme.
23. Exemples de problèmes d'intersection en géométrie
24. Pourcentages et taux d'évolution.
25. Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations.
26. Problèmes conduisant à une modélisation par des graphes, par des matrices.
27. Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré.
28. Suites numériques. Limites.
29. Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
30. Détermination de limites d'une fonction réelle de variable réelle.
31. Théorème des valeurs intermédiaires.

32. Nombre dérivé. Fonction dérivée.
33. Fonctions exponentielles.
34. Fonctions logarithmes.
35. Fonctions convexes.
36. Primitives, équations différentielles.
37. Intégrales, primitives.
38. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).
39. Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées).
40. Exemples de modèles d'évolution.
41. Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme.
42. Différents types de raisonnement en mathématiques.
43. Exemples d'approche historique de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée.
44. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

LEÇON

1

Exemples de dénombrements dans différentes situations.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Première Spé Maths, Terminale Spé Maths

Prérequis : Suites numériques, suites arithmétiques, suites géométriques, théorie des ensembles.

Sources :

- Manuels Sesamath 2nde-1ère Spé-Term TermSpé [url]
- C. Boulonne, *Recueil de dossiers du CAPES de Mathématiques*, Session 2013-2019 [url]
- Ch. Bertault, *Dénombrements*, Mathématiques en MPSI [url]
- Wikipédia, *Problème de l'échiquier de Sissa*
- Wikipédia, *Problème du cavalier* [url]
- S. Bays, *Dénombrement* [url]
- P. Milan, *Combinaisons au poker* [url]
- A. Bodin, *Dénombrements* [url]
- *Dénombrement*, Université Claude Bernard–Lyon I CAPES de Mathématiques : Arithmétique Année 2006–2007 [url]

1.1 Sommes de suites

1.1.1 Suites arithmétiques

- Escalier simple
- Escalier triple (Dossier CAPES Maths 2019 [url])
- Château de cartes (Dossier CAPES Maths 2017 [url])
- Pile de livres (Exercice 142 Sesamath 1$^{\text{re}}$Spé [url])

1.1.2 Suites géométriques

- L'échiquier de Sissa (Wikipédia [url])

1.2 Situations classiques de dénombrements

1.2.1 Illustration du principe des tiroirs

- Enoncé du principe des tiroirs

— 5 points dans un carré d'arête 2 (Ch. Bertault, Dénombrement [url])

1.2.2 Dénombrement intersection/union

— Utilisation de la formule : $\mathrm{card}(E \cap F) + \mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F)$.
Cbap 11 Exercice 87 Sesamath TermSpé [url]

— Même formule qu'en probabilité :
Chap 13 Exercice 90 Sesamath 2nde [url]

1.2.3 Tirages successifs avec remise : listes

— Numéro à 10 chiffres (Chap 11 Exercice 37 Sesamath TermSpé [url])

— Urne contenant 8 boules, on en tire 5 successivement avec remise (Mathematice [url])

1.2.4 Tirages successifs sans remise : arrangements

— Découpage d'un rectangle (Chap 11 Exercice 47 Sesamath TermSpé [url])

— Le jeu de la grenouille (Chap 11 Exercice 48 Sesamath TermSpé [url])

1.2.5 Tirages simultanés : combinaisons

— Mains au poker [url]

1.2.6 Triangle de Pascal et propriétés des combinaisons

Sur une idée de Mathematice [url]

— Nombre de chemins possibles (Ex7 Dénombrements Exo7 [url])

— Nombre de sous-ensembles

1.2.7 Différenciation des situations de dénombrements

On peut combiner les différentes situations dans un même exercice :
Ch. 11 ex 76 Sesamath TermSpé [url]

1.3 Autres situations de dénombrements

1.3.1 Diagonales d'un polygone

Exercice 145 Sesamath 1$^{\text{re}}$ Spé [url]

1.3.2 Régionnement du plan

Exercice 12 Dénombrements Exo7 [url]

1.3.3 Tour d'Hanoi

Exercice 145 Sesamath 1$^{\text{re}}$ Spé [url]

1.3.4 Déplacement du cavalier

Wikipédia [url]

1.3.5 Dérangements

CAPES Université Lyon 1 2006-2007 [url]

1.3.6 Puissances de dix

Exercice 91 Sesamath Term Spé [url]

LEÇON

2

Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.

Préambule

Niveau : lycée

Prérequis : théorie des ensembles

Références :

[1] G. Costantini, *Probabilités (discrètes).* Cours de Première S.

[2] P. Ribereau, *Cours 5 Probabilités : Notion probas conditionnelles et indépendance.*

2.1 Expérience aléatoire, événements

2.1.1 Expérience aléatoire

Définition 2.1.
On dit qu'on fait une expérience de type *aléatoire* si on ne peut pas prévoir le résultat final de cette expérience.

Exemples 2.2.

1. On lance une pièce et on observe le côté exposé (pile ou face). Il y a deux issues possibles sur cette expérience.
2. On dispose d'une urne avec 100 boules, on tire une d'entre elles et on note le numéro. Cette expérience aléatoire a 100 issues possibles.

Définition 2.3. *Univers*
L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé *univers*. On note généralement cet ensemble Ω.

Remarque 2.4.
Dans cette leçon, on se limitera au cas où Ω est un ensemble fini.

Exemple 2.5.
On reprend les expériences de l'exemple 2.2

1. Si on lance une pièce de monnaie, on obtient $\Omega = \{P, F\}$.
2. Si on tire une boule numérotée dans une urne où il en contient 100 alors $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$.

2.1.2 Evénement associé à une expérience aléatoire

Dans ce qui suit, nous allons décrire ce qu'est un événement :

Définition 2.6. *Vocabulaire des évènements*

- Un *événement élémentaire* (qu'on note ω) est ce qui constitue l'une des issue de la situation étudiée (un élément de Ω).
- Un *événement* est un ensemble de plusieurs issues.
- L'événement *« A et B »* (qu'on note $A \cap B$) est l'événement constitué des issues communes aux deux événements.
- L'événement *« A ou B »* (qu'on note $A \cup B$) est l'événement constitué de toutes les issues des deux événements.
- Deux événements *incompatibles* A et B (qu'on note $A \cap B = \varnothing$) sont deux événements qui n'ont pas d'éléments en commun.
- L'événement est dit *contraire* de A (qu'on note $\overline{A}$) si A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A}$ forme la totalité des issues.

Exemples 2.7.
On lance deux dés équilibrés. On calcule la somme des numéros qui apparaissent sur la face du dessus des deux dés.

1. Obtenir un 7 est un événement élémentaire : $\omega = \{7\}$.
2. Obtenir un nombre pair est l'événement $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
3. Obtenir un multiple de trois est l'événement $B = \{3, 6, 9, 12\}$.
4. $A \cap B = \{6, 12\}$.
5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
6. Si $C = \{10, 11, 12\}$ et $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles.
7. Ici, A représente l'événement « obtenir une somme impaire ». Ainsi, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme paire » et en plus :
   - $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
   - $A \cup \overline{A} = \Omega$.

2.2 Probabilité

2.2.1 Loi de probabilités sur un univers Ω

Définition 2.8. *Loi de probabilité*

Soit Ω un univers et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements associé à cette expérience aléatoire). On appelle *probabilité* P toute application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. $P(\Omega) = 1$
3. Soit $(A_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ une famille d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints (si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$) alors :
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

► **Exercice 2.9.**
On se donne les probabilités d'apparition des faces d'un dé truqué :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités $P(\omega)$	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement $A =$ « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
2. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

◊ *Solutions de l'exercice 2.9.* 1. On veut calculer la probabilité de l'événement $A =$ « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ». D'après le principe :

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,05 + 0,05 + 0,1 + 0,1 = 0,3.$$

2. On veut calculer la probabilité d'obtenir un 6. En utilisant une des propriétés de probabilités, on a :

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

donc $P(6) = 0,5$.

□

2.2.2 Propriétés de calcul des probabilités

Propriétés 2.10.
Soient $A, B \subset \Omega$. Alors :

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. ◊

1. On applique 2 de la définition 2.8 à A et $\varnothing$ (ils sont disjoints car $A \cap \varnothing = \varnothing$) d'où :

$$P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing) \Leftrightarrow P(A) = P(A) + P(\varnothing)$$

et donc on en déduit que $P(\varnothing) = 0$.

2. Comme $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, on a :

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Or $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = 1$, d'où $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

3. On a : $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, de plus $(A \setminus B)$ et $A \cap B$ sont disjoints donc on peut appliquer la définition :

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$

4. $A \subset B$ implique que $B = (B \cap \overline{A}) \cup A$. Cette réunion d'ensembles est en plus disjointe donc :

$$P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}).$$

Comme $P(B \cap \overline{A}) \geqslant 0$, $P(A) \leqslant P(B)$.

5. On a :
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$
Les ensembles présents dans la réunion sont deux à deux disjoints donc :
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

□

2.2.3 Équiprobabilité

Définition 2.11. *Équiprobabilité*

Si tous les éléments de Ω (l'univers d'une expérience aléatoire) ont la même propriété d'apparition alors Ω est dit *équiprobable*. Si $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :
$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Propriété 2.12.
Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est :
$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n_A \text{ fois}} = \frac{n_A}{n} = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

► **Exercice 2.13.**
On lance un dé (non truqué), ainsi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On est dans le cas d'une équiprobabilité.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 5.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

◊ *Solutions de l'exercice 2.13.* 1. La probabilité d'avoir un 5 est $P(5) = \frac{1}{6}$ ($\{5\}$ étant un événement élémentaire).

2. Comme l'événement « obtenir un nombre pair » est l'ensemble $\mathscr{T} = \{2, 4, 6\}$. On a : $\operatorname{card}(\mathscr{T}) = 3$, d'où :
$$P(\mathscr{T}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

2.3 Probabilité conditionnelle

2.3.1 Un exemple pour débuter

Exemple 2.14.
On considère une population de 500 individus parmi lesquels il y a 180 femmes et 90 des 500 individus ont l'allèle du daltonisme. On choisit un individu au hasard dans cette population (c'est une expérience aléatoire). On note :
$$\begin{aligned} F &= \text{« l'individu choisi est une femme »} \\ D &= \text{« l'individu choisi possède l'allèle du daltonisme »} \end{aligned}$$

◊ L'univers Ω est l'ensemble des individus, il est *équiprobable*. Chaque individu a la même probabilité d'être choisi, cette probabilité est égale à $\frac{1}{500}$. Donc :

$$P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{90}{500} = 0,18.$$

Maintenant, on se restreint à la *sous-population des femmes*. On sait que 9 femmes possèdent l'allèle du daltonisme. L'univers Ω' est l'ensemble des femmes F. Il est *équiprobable*. Chaque femme a une chance sur 180 d'être choisie.

On cherche la probabilité qu'une femme choisi au hasard possède l'allèle du daltonisme :

$$\frac{\text{card}(D \cap F)}{\text{card}(\Omega')} = \frac{9}{180} = 0,05.$$

On note cette probabilité :

$$P_F(D) = \frac{\text{card}(D \cap F)}{\text{card}(F)} = \frac{P(D \cap F)}{P(F)}.$$

2.3.2 Probabilité conditionnelle

Définition 2.15.
Soit F un événement de probabilité *strictement positive* (c'est-à-dire $F \subset \Omega$ et $P(F) > 0$). On appelle *probabilité conditionnelle* à F, l'application $P_F : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ telle que :

$$\begin{array}{rccc} P_F & : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ & A & \longmapsto & P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} \end{array}.$$

Proposition 2.16.
L'application P_F est une probabilité.

◊ *Démonstration de la proposition 2.16.* On vérifie que P_F prend ses valeurs dans $[0;1]$. Si $A \cap F \subset F$ alors $P(A \cap F) \leqslant P(F)$ et ainsi :

$$\frac{P(A \cap F)}{P(F)} = P_F(A) \leqslant 1$$

et $P_F(A) \geqslant 0$ comme quotient de deux probabilités. On vérifie le point 1 de la définition 2.8 :

$$P_F(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

On vérifie ensuite le point 2 de la définition 2.8. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements dans Ω deux à deux disjoints.

$$P_F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap F\right)}{P(F)} = \frac{P\left(\bigcup_{i \in I}(A_i \cap F)\right)}{P(F)}.$$

Mais $A_i \cap F \subset A_i$ donc tous les $(A_i \cap F)$ sont deux à deux disjoints et :

$$P_F\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \frac{\sum_{i \in I} P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i \in I} \frac{P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i \in I} P_F(A_i).$$

□

Propriété 2.17. *Probabilités composées*
Soit Ω un univers, F et A deux événements tel que $P(F) > 0$. Alors,

$$P(A \cap F) = P_F(A) \times P(F) = P_A(F) \times P(A).$$

2.3.3 Formule des probabilités totales et de Bayes

Propriété 2.18. *Formule des probabilités totales*
Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i).$$

Exemple 2.19.
On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules rouges et 4 boules vertes et l'urne U_2 contient 7 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux rouges en tout.

◊ On note :

$$R = \{\text{rouge au } 1^{\text{er}} \text{ tirage}\}, \quad R' = \{\text{rouge au } 2^{\text{e}} \text{ tirage}\},$$
$$H_1 = \{\text{choix de l'urne } U_1\}, \quad H_2 = \overline{H}_1 = \{\text{choix de l'urne } U_2\}.$$

On a ainsi :

$$P_{H_1}(R) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad P_{H_1}(R \cap R') = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$P_{H_2}(R) = \frac{3}{10}, \quad P_{H_2}(R \cap R') = \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

La forme de conditionnement donne :

$$\begin{aligned} P(R) &= P_{H_1}(R)P(H_1) + P_{H_2}(R)P(H_2) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{4+10}{40} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(R \cap R') &= P_{H_1}(R \cap R')P(H_1) + P_{H_2}(R \cap R')P(H_2) \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{27}{200}. \end{aligned}$$

Propriété 2.20. *Formule de Bayes*
Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition d'événements non vides de Ω. Soit $A \subset \Omega$. Alors :

$$P_A(E_i) = \frac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i)}.$$

Exemple 2.21.
Un test sanguin a une probabilité de $0,95$ de détecter un certain virus lorsque celui-ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. On cherche la probabilité que la personne ait le virus sachant qu'elle est positif (et on sait que $0,5\%$ de la population est porteuse du virus).

◊ On note :

$$V = \{\text{la personne testée a le virus}\},$$
$$T = \{\text{la personne testée a un test positif}\}.$$

On cherche $P_T(V)$. Or, on sait que :

$$P(V) = 0,005, \quad P_V(T) = 0,95, \quad P_{\overline{V}}(T) = 0,01.$$

On en déduit par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{P_V(T)P(V)}{P_V(T)P(V) + P_{\overline{V}}(T)P(\overline{V})} \\ &= \frac{0,95 \times 0,005}{0,95 \times 0,005 + 0,01 \times 0,995} \approx 0,323. \end{aligned}$$

2.3.4 Indépendance

Définition 2.22. *Indépendance de deux événements*
Deux événements E et F sont indépendants si :

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F).$$

Remarque 2.23.
D'après la propriété des probabilités composées, $P(E) = P_F(E)$ (si $P(F) > 0$). Ce résultat correspond à l'idée intuitive que si E et F sont *indépendants* alors la réalisation de F n'apporte pas d'information sur E.

Exemple 2.24.
On jette deux fois le même dé. Les événements

$$\begin{aligned} A &= \{\text{obtention d'un chiffre pair au premier lancer}\}, \\ B &= \{\text{obtention du 1 au deuxième lancer}\}, \end{aligned}$$

sont indépendants.

◊ En effet, en prenant $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ et si on fait l'hypothèse d'équiprobabilité dans Ω (c'est-à-dire que P est équiprobable), on vérifie que :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6 \times 1}{36} = \frac{1}{6}. \\ P(A \cap B) &= \frac{3 \times 1}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

2.3.5 Un exercice pour finir

▶ **Exercice 2.25.**
Dans une urne sont placés 100 jetons rouges, dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1. On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.

Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les événements A : « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

◊ *Solutions de l'exercice 2.25.* Soit x le nombre de jetons verts numérotés 1 qu'il faut rajouter dans l'urne. On peut dresser un tableau à double entrée pour obtenir le nombre de jetons de chaque catégorie.

Jetons	n° 0	n° 1
Rouges	50	50
Verts	30	x

On veut trouver la valeur de x telle que les événements A : « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne. On a ainsi :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)P(B) &\Leftrightarrow \frac{50}{130+x} = \frac{100}{130+x} \times \frac{50+30}{130+x} \\ &\Leftrightarrow \frac{50}{130+x} = \frac{8000}{(130+x)^2} \quad (*) \end{aligned}$$

$130 + x \neq 0$ car $x \geqslant 0$ donc :

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow 50(130+x)^2 = 8000(130+x) &\Leftrightarrow 50(130+x) = 8000 \Leftrightarrow 130 + x = 160 \\ &\Leftrightarrow x = 160 - 130 \Leftrightarrow x = 30. \end{aligned}$$

Il faut donc rajouter 30 jetons verts numérotés 1 pour que les événements A : « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne. □

LEÇON

3

Variables aléatoires discrètes.

Préambule

Niveau : terminale « Mathématiques Complémentaires » et « Mathématiques Spécialité »

Prérequis : probabilités

Références :

[1] P. Duval, *Probabilité, TS.* [url]

[2] G. Costantini, *Probabilité : Généralités, conditionnement, indépendance.* Cours de Première S. [url]

[3] L. Gallardo, *Chapitre 3 : Variables aléatoires discrètes, espérance, variance et loi des grands nombres.* [url]

3.1 Loi de probabilités. Fonction de répartition

Dans cette leçon, les variables aléatoires considérées seront *discrètes* (c'est-à-dire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable).

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé modélisant une certaine expérience aléatoire. On se place dans le cas où Ω est discret et dans ce cas on supposera que la tribu $\mathscr{F}$ des événements est égale à l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ de tous les sous-ensembles de Ω.

Définition 3.1. *Variable aléatoire discrète*

On appelle *variable aléatoire discrète* définie sur Ω toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

1. L'ensemble $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in D\}$ (avec $D = \{1, 2, \dots, N\}$ si $X(\Omega)$ est fini, et $D = \mathbb{N}^*$ si $X(\Omega)$ est dénombrable) des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.
2. Pour tout $x_i \in X(\Omega)$, on a :

$$[X = x_i] := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} \in \mathscr{F}$$

(c'est-à-dire l'ensemble $[X = x_i]$ est un événement). On dit que c'est l'événement « X prend la valeur x_i ».

Exemple 3.2.

On lance trois fois une pièce non truqué et on compte le nombre de fois où on obtient « Face ». On définit ainsi une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

et

$$X(PPP) = 0,\ X(PPF) = 1,\ X(PFP) = 1,\ X(FPP) = 1$$
$$X(FFP) = 2,\ X(FPF) = 2,\ X(PFF) = 2,\ X(FFF) = 3.$$

Définition 3.3. *Loi de probabilité*

Soit P une probabilité sur un univers Ω. Soit X une x² variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini de cardinal n. Lorsqu'à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de X on associe les probabilités p_i de l'événement « $X = x_i$ », on dit que l'on définit *une loi de probabilité* P_X de la variable aléatoire X.

Exemple 3.4.

Dans l'exemple précédent, on a équiprobabilité de Ω (la probabilité d'obtenir un des événements élémentaires étant de $\frac{1}{8}$). La probabilité d'obtenir 2 fois le côté face de la pièce est de :

$$P_X(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

Définition 3.5. *Fonction de répartition*

La *fonction de répartition* de la variable aléatoire X est la fonction F telle que :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ & & x & \longmapsto & F(x) = P(X \leqslant x) \end{array}.$$

Propriété 3.6.

La fonction de répartition est toujours une fonction croissante et bornée par 0 et 1.

Exemple 3.7.

Avec l'exemple précédent, on a :

— Pour $x \in]-\infty; 0[$, on a :
$$F(x) = 0$$

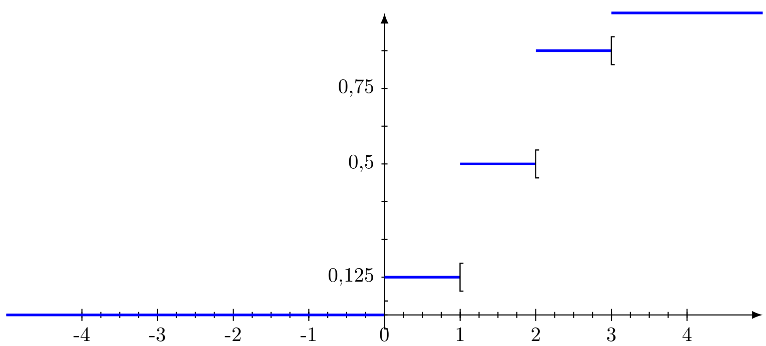
— Pour $x \in]0; 1]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8}$$

— Pour $x \in]1; 2]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

— Pour $x \in]2; 3]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

— Pour $x \in]3; 4]$, on a :
$$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Voici la représentation graphique :



3.2 Espérance mathématique

Définition 3.8. *Espérance mathématique*

Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini [a]. On note $\{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombré, noté $\mathbb{E}[X]$, défini par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

où $p_i = P(X = x_i)$.

a. Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, l'espérance existe encore sous réserve de la convergence (absolue) de la série de terme général $x_n p_n$.

Remarque 3.9.
L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

Exemple 3.10.
On reprend l'exemple de la pièce de monnaie. On a :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{2}.$$

Remarque 3.11.
On pourrait aussi calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$ en revenant aux événements élémentaires de l'univers Ω au lieu d'utiliser les valeurs x_i de la variable aléatoire X :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Exemple 3.12. *Suite à la remarque 3.11*
Sur l'exemple précédent, comme $P(\omega) = \frac{1}{8}$, cela donnerait :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{8} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \\
&= \frac{1}{8} [X(PPP) + X(PPF) + X(PFP) + X(FPP) \\
&\qquad + X(PFF) + X(FPF) + X(FFP) + X(FFF)] \\
&= \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.13. *Linéarité de l'espérance*
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω de cardinal fini. Soit P une probabilité sur Ω. On a :

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

En particulier, si b est un réel :

$$\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$$

et pour tout réel k,

$$\mathbb{E}[kX] = k\mathbb{E}[X].$$

◊ *Démonstration du théorème 3.13.* On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X+Y\right] &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)P(\omega)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\omega)=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right].\end{aligned}$$

En prenant Y constante égale à b, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[X+b\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[b\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+b.$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left[kX\right]=\sum_{i=1}^{n}kp_ix_i=k\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=k\mathbb{E}\left[X\right].$$

□

3.3 Variance et écart-type

Définition 3.14. *Variance et écart-type*

Soient Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini. On note $\{x_1,\dots,x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X).

— La *variance* de la variable aléatoire X est le nombre, notée $\mathbb{V}(X)$, défini par :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X\right]]^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-\mathbb{E}\left[X\right])^2\\ &= p_1(x_1-\mathbb{E}\left[X\right])^2+\dots+p_n(x_n-\mathbb{E}\left[X\right])^2.\end{aligned}$$

— L'*écart-type* de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarques 3.15.

1. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
2. La variance est une quantité positive, donc l'écart-type est bien défini.

Exemple 3.16.

Sur le problème du comptage du côté face, on calcule la variance de X :

$$\mathbb{V}(X)=\frac{1}{8}\left(0-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

D'où :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 3.17.

Montrer que l'espérance $\mathbb{E}\left[X\right]$ minimise la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-x)^2$$

mais pas la fonction g définie par :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - x| .$$

◊ *Réponse à l'exercice 3.17.* La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - 2x\sum_{i=1}^{n} p_i = -2(\mathbb{E}[X] - x).$$

On en déduit :

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \mathbb{E}[X] .$$

Donc f admet un minimum en $\mathbb{E}[X]$ (et ce minimum est $f(\mathbb{E}[X]) = \mathbb{V}(X)$. L'espérance est donc la quantité qui minimise la moyenne des carrés des écarts. Par contre, elle ne minimise ps la moyenne des écarts. En effet, on considère la variable aléatoire X définie par la loi suivante :

x_i	0	1000
p_i	0,9	0,1

On a :

$$\mathbb{E}[X] = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1000$$
$$g(\mathbb{E}[X]) = p_1 |x_1 - 1000| + p_2 |x_2 - 1000| = 90 + 90 = 180.$$

Or :

$$g(0) = \mathbb{E}[X] = 100.$$

Donc : $g(0) < g(\mathbb{E}[X])$. Conclusion : $\mathbb{E}[X]$ ne minimise pas la fonction g et on peut montrer que la médiane est ce minimum. □

Théorème 3.18. *Formule de Koenig*
La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - [\mathbb{E}[X]]^2.$$

La variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne.

◊ *Démonstration de la formule de Koeing.* On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X = b$ est égale à la constante b. D'après la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[1]\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}[X]]^2$. □

Exemple 3.19.
On reprend l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. On rappelle que X est le nombre de « face » obtenu. On a déjà calculé $\mathbb{E}[X]$, on calcule $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{1}{8} \times 0^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{3}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 = 3.$$

D'où :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - [\mathbb{E}[X]]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Corollaire 3.20. *Effet d'un changement affine sur la variance et l'écart-type*
Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels. On :

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

En particulier :

$$\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$$

et

$$\mathbb{V}(X+b) = \mathbb{V}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X+b) = \sigma(X).$$

◊ *Démonstration du corollaire 3.20.* On peut démontrer ce corollaire de deux façons :

1. En revenant à la définition de la variance et en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}\left[[(aX+b) - \mathbb{E}[aX+b]]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[[aX+b-a\mathbb{E}[X]-b]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[[aX-a\mathbb{E}[X]]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[[a(X-\mathbb{E}[X]]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[a^2(X-\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\mathbb{V}(X).
\end{aligned}$$

2. D'après la formule de Koeing, on a :

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\left[a^2X^2+2abX+b^2\right] - [\mathbb{E}[aX+b]]^2$$

et d'après la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+b) &= a^2\mathbb{E}\left[X^2\right] + 2ab\mathbb{E}[X] + b^2 - [a\mathbb{E}[X]+b]^2 \\
&= a^2\mathbb{E}\left[X^2\right] + 2ab\mathbb{E}[X] + b^2 - a^2[\mathbb{E}[X]]^2 - 2ab\mathbb{E}[X] - b^2 \\
&= a^2(\mathbb{E}\left[X^2\right]) - a^2(\mathbb{E}[X])^2 = a^2(\mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2) = a^2\mathbb{V}(X).
\end{aligned}$$

D'où, par passage à la racine carrée :

$$\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Pour montrer la particularisation, il faut remplacer dans chaque formule $b=0$ et $a=1$ (selon le cas que l'on veut démonter).

□

3.4 Exemples de variables aléatoires discrètes

3.4.1 Loi de Bernoulli

Définition 3.21.
Une *expérience de Bernoulli* est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée « succès »qui a pour probabilité p, l'autre appelée « échec »qui a pour probabilité $q = 1 - p$.

Définir une *loi de Bernoulli de paramètre* p, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple 3.22.
Si on lance un dé et qu'on nomme « succès » l'apparition de la face 6, on définit la loi de Bernoulli suivante :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Propriété 3.23.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, alors :
— L'espérance de X vaut $\mathbb{E}[X] = p$.
— La variance de X vaut $\mathbb{V}(X) = pq$.

Exemple 3.24.
Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{5}{36}$.

3.4.2 Loi binomiale

Définition 3.25. *Loi binomiale*
La *loi binomiale de paramètres* n *et* p, notée $\mathscr{B}((, n), p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répartition de n expériences de Bernoulli de paramètres p identiques et indépendantes. Elle est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad \forall 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Exemple 3.26.
On lance 2 fois un dé bien équilibré. On s'intéresse à l'apparition de la face 6. Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{6}$. On obtient donc une loi binomiale $\mathscr{B}((, 2), 1/6)$.

nombre de succès	0	1	2
probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 3.27.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}((, n), p)$ alors :
— L'espérance de X vaut $\mathbb{E}[X] = np$.
— La variance de X vaut $\mathbb{V}(X) = npq$.

Exemple 3.28.
Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{5}{18}$.

3.4.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

— nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,

— nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,

— nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule...

Définition 3.29.
La variable aléatoire X suit une *loi de Poisson de paramètre* λ, notée $\mathscr{P}(()\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

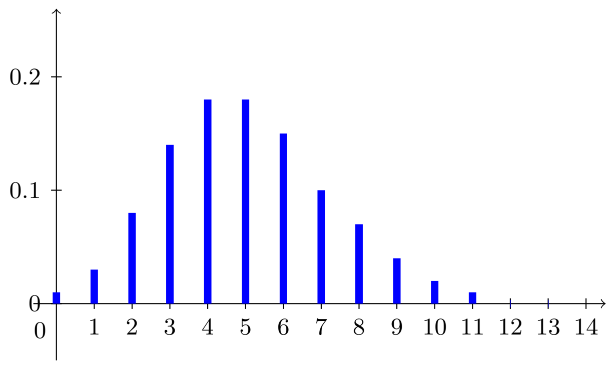
Exemple 3.30.
On considère la variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

$\Diamond$

— Pour $\lambda = 5$, la table de la loi de Poisson nous donne :

k	$P(X = k)$
0	0,007
1	0,034
2	0,084
3	0,140
4	0,176
5	0,176
6	0,146
7	0,104
8	0,065
9	0,036
10	0,018
11	0,008
12	0,003
13	0,001
14	0,000

— On peut aussi représenter graphiquement la loi $\mathscr{P}(()5)$:



— La probabilité qu'entre 14h30 et 14h40, 10 personnes exactement se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X = 10) = 0,018.$$

— La probabilité qu'entre 15h20 et 15h30, au maximum 3 personnes se présentent à ce guichet vaut :

$$P(X \leqslant 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,265.$$

— La probabilité qu'entre 16h00 et 16h10, 8 personnes au moins se présentent à ce guichet vaut :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 8) &= 1 - P(X < 8) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 7)] \\ &= 1 - 0,867 = 0,133 \end{aligned}$$

Propriété 3.31.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Exemple 3.32.
Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}(X) = 5$.

3.5 Applications

3.5.1 Jeux équitables

Deux joueurs A et B jouent à un jeu d'argent où la probabilité de gagner est égale à p pour A et $1 - p$ pour B ($0 < p < 1$). Les mises de A et B sont respectivement s et s' euros et le vainqueur empoche le total des enjeux. Soient X et Y les gains de joueurs A et B. Le jeu est dit *équitable* si $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. On a :

$$\mathbb{E}[X] = s'p - s(1 - p) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y] = (1 - p)s - s'p.$$

Le jeu est donc équitable si

$$\frac{s}{p} = \frac{s'}{1 - p},$$

autrement dit si les enjeux des joueurs sont proportionnels à leur probabilité de succès.

3.5.2 Le jeu de Saint-Petersbourg

Imaginons le jeu de casino suivant : on lance une pièce (non truquée) jusqu'à l'apparition du premier pile. Si cela se produit au n-ième lancer, la banque verse au joueur la somme $X = 2^n$ euros. Quel doit être l'enjeu que la banque devrait exiger du joueur pour ne pas être perdante ?

Pour que le jeu soit équitable, la mise doit être égale à l'espérance du gain du joueur. Mais l'espérance de X n'est pas finie car X prend les valeurs 2^n ($n \geqslant 1$) et $P(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$ donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n P(X = 2^n) = +\infty.$$

LEÇON

4

Variables aléatoires réelles à densité.

Préambule

Niveau : terminale « Mathématiques Complémentaires » Spécialité »

Prérequis : probabilités, intégrales, primitives, croissance comparée, équations différentielles, désintégration radioactive

Références :

[1] G. Costantini, *Lois de probabilités continues*. URL : [url].

[2] C. Suquet, *Intégration et Probabilités Élémentaires*. URL : [url]. 2009-2010.

4.1 Introduction

Nous avons vu dans la leçon « Variables aléatoires discrètes » que des variables aléatoires peuvent prendre leur valeur dans un sous-ensemble des nombres entiers. On va essayer de généraliser en élargissant l'ensemble des valeurs de départ d'une variable aléatoire à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 4.1.
On tire au hasard un point a sur le segment $[0;1]$ et on note $X = a$. On a alors $X(\Omega) = [0;1]$.

1. Calculer $P(\{X = 0{,}5\})$.
2. Calculer la probabilité que X appartienne au segment $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

4.2 Densité et loi de probabilité

Définition 4.2. *Densité de probabilité*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *densité de probabilité sur I*, toute fonction f *continue et positive sur I* telle que :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque 4.3.
La notation $\int_I$ désigne l'intégrale sur l'intervalle I.

1. Si $I = [a;b]$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si I est non borné d'un coté (par exemple $I = [a;+\infty[$ alors
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Si $I = \mathbb{R}$ alors :
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(x)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 4.4.
Soit f une fonction constante sur l'intervalle $[0;1]$. On cherche la valeur de cette constante pour que f soit une densité. On note γ cette constante :
$$\int_0^1 \gamma\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$
Plus généralement, si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, on montre que
$$f(t) = \gamma = \frac{1}{b-a}.$$

Définition 4.5. *Loi de probabilité*
Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a;b]$ de I associe la quantité :
$$P([a;b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
est appelé loi de probabilité sur I.

$\Diamond$ *Justification de la définition 4.5.* Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-intervalles disjoints de I, alors par linéarité de l'intégrale :
$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(I_n)$$
et de plus $P(I) = 1$. $\square$

Remarques 4.6.
1. On a bien $0 \leqslant P([a;b]) \leqslant 1$ car $[a;b]$ est inclus dans I.
2. On a :
$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement « *presque-sûrement impossible* ».

Exemples 4.7.
1. Si f est constante sur $[a;b]$, on dit que P est la *loi uniforme.*
2. Si f est de la forme $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$, on dit que P est la *loi exponentielle de paramètre* λ. On a tout de même besoin d'une justification. Soit $\lambda > 0$ un réel. On montre que $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$. On calcule :
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} t}{\lambda}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Or, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})=1.$$

La limite en $+\infty$ de $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe bien et on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

4.3 Variables aléatoires continues. Loi uniforme, loi exponentielle

Définition 4.8.
Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de f. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle $[a;b]$ de I, on a :

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples 4.9.

1. On peut maintenant répondre aux questions de l'exemple introductif. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. Donc :

   (a)
   $$P(X=0{,}5)=\int_{0{,}5}^{0{,}5}1\,\mathrm{d}t=0.$$

   (b)
   $$P(X\in[0;0{,}5])=P(0\leqslant X\leqslant 0{,}5)=\int_0^{0{,}5}1\,\mathrm{d}t=0{,}5.$$

   Dans le cas général, supposons que X suivent la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors :

   $$P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\int_\alpha^\beta\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

   On note $L([a;b])$ la longueur de l'intervalle de $[a;b]$. Si X suit une loi uniforme sur un intervalle I, alors la probabilité d'un sous-intervalle J est donné par la formule :

   $$P(X\in J)=\frac{L(J)}{L(I)}.$$

2. Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, alors

   $$P(0\leqslant X\leqslant x)=\int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

   et par complémentarité :

   $$P(X\geqslant x)=1-P(0\leqslant X\leqslant x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Définition 4.10. *Fonction de répartition*
Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme $[a;b]$ (ou de la forme $[a;+\infty[$) qui suit une loi de probabilité P. On appelle *fonction de répartition de* X, la fonction F définie pour tout réel x de I par :

$$F(x)=P(X\leqslant x).$$

Propriété 4.11.
Si F est une fonction de répartition de X alors :

1. F est croissante sur $[a; x]$,
2. $F(a) = 0$,
3. $F(b) = 1$ (si $I = [a; b]$) ou
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad \text{si } I = [a; +\infty[.$$
4. $P(X > x) = 1 - F(x)$
5. $P(\alpha < X \leqslant \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Exemple 4.12.
Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, on a :
$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

4.4 Espérance d'une variable aléatoire continue

Définition 4.13. *Espérance d'une variable aléatoire continue*
Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I. On appelle *espérance* de X la quantité :
$$\mathbb{E}[X] = \int_I t f(t) \, \mathrm{d}t$$

Exemples 4.14.
1. Si X suit une loi uniforme sur $I = [a; b]$ alors :
$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{t}{b-a} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}.$$
2. Soit X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On calcule l'intégrale suivante :
$$\int_0^x t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t.$$
On pose :
$$u(t) = t \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$
ainsi
$$u'(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad v(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}.$$
Une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned} \lambda \int_0^x t\mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t &= \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \\ &= -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1}{\lambda}. \end{aligned}$$
Puis, on étudie la limite lorsque x tend vers $+\infty$. On sait que :
$$\lim_{x \to +\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

grâce à la règle des croissances comparées et

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$$

donc $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.

4.5 Exemples de variables aléatoires à densité

4.5.1 Lois normales

Définition

Définition 4.15. *Loi normale*

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi normale $\mathscr{N}(m, \sigma)$ si elle a pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}.$$

Conséquence 4.16.

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2} \,\mathrm{d}x.$$

Cas particulier de $\mathscr{N}(0, 1)$

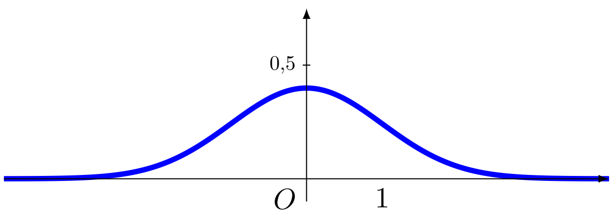
La densité de probabilité est alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ et on appelle, dans ce cas, Π la fonction de répartition.

On a donc :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} 2 \,\mathrm{d}x = \Pi(b) - \Pi(a).$$

Les valeurs de la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite étant tabulées, il est désormais possible de calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

Propriété 4.17.
La fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.



Conséquence 4.18.
Si $x > 0$ alors $\Pi(-x) = 1 - \Pi(x)$.

Démonstration. ◊ En effet :

$$\Pi(-x) = P(X \leqslant -x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-x} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

car f une fonction paire

$$= \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

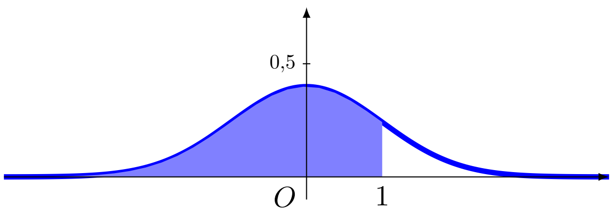
après le changement de variable $u = -t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \Pi(x).$$

□

Exemples 4.19.

1. $\Pi(1) = P(X \leqslant 1)$ correspond donc à l'aire sous la courbe délimité à *droite* par la droite d'équation $x = 1$.
2. $\Pi(-1) = P(X \leqslant -1) = 1 - \Pi(-1)$ correspond à l'aire sous la courbe délimité *à gauche* par la droite d'équation $x = 1$.



Se ramener à une $\mathscr{N}(0,1)$

Propriété 4.20.
Soit $X \sim \mathscr{N}(m,\sigma)$. Alors $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim \mathscr{N}(0,1)$. On dit qu'on centre et qu'on réduit la variable aléatoire X.

Démonstration. ◊

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = P\left(a \leqslant \frac{X-m}{\sigma} \leqslant b\right)$$
$$= P(A\sigma + m \leqslant X \leqslant b\sigma + m) = \int_{a\sigma+m}^{b\sigma+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2}\,\mathrm{d}x$$

On effectue alors le changement de variable $y = \dfrac{x-m}{\sigma}$ et on obtient :

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \sigma\,\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

donc Y a pour densité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$. La variable aléatoire Y suit bien une loi normale centrée réduite. □

Exemple 4.21.
La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m = 2,09$ et $\sigma = 0,13$, autrement dit $X \sim \mathcal{N}(2.09, 0.13)$.

On va se ramener à une loi normale centrée réduit en posant : $T = \frac{X-m}{\sigma}$ et donc $T \sim \mathcal{N}(0,1)$. On demande de calculer $P(X \leqslant 2,35)$ et $P(1,895 \leqslant X \leqslant 2,285)$.

$$P(X \leqslant 2,35) = P\left(\frac{X-2,09}{0,13} \leqslant 2\right) = P(T \leqslant 2) = 0,9772.$$

$$\begin{aligned} P(1,895 \leqslant X \leqslant 2,285) &= P(-1,5 \leqslant T \leqslant 1,5) = P(T \leqslant 1,5) - P(T \leqslant -1,5) \\ &= P(T \leqslant 1,5) - (1 - P(T \leqslant 1,5)) = 2 \times P(T \leqslant 1,5) - 1 \\ &= 2 \times 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$

Espérance et variance

Propriété 4.22.
Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $\mathbb{E}[X] = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Démonstration. ◊

—
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-1/2[(x-m)/\sigma]^2} \,\mathrm{d}x.$$

On considère la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ alors $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. On a : $X = \sigma Y + m$ donc :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \sigma\mathbb{E}[Y] + m \\ \mathbb{V}(X) = \sigma^2\mathbb{V}(Y) \end{cases}$$

donc si $\begin{cases} \mathbb{E}[Y] = 0 \\ \mathbb{V}(Y) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} \mathbb{E}[X] = m \\ \mathbb{V}(X) = \sigma^2 \end{cases}$.

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{car } f \text{ est une fonction paire.}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}\left[Y^2\right].$$

Il faut donc calculer :

$$\mathbb{E}[Y]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2} 2 \,\mathrm{d}y.$$

Pour cela, on va faire une IPP en considérant l'intégrale suivante :

$$\text{soit } a > 0, \quad I(a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y$$

avec :

$$\begin{cases} u(y) = \mathrm{e}^{-y^2} 2, \; u'(x) = -y\mathrm{e}^{-y^2/2} \\ v'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; v(y) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \left[\frac{y}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} y^2 \mathrm{e}^{-y^2} 2 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-a^2/2} + \int_{-a}^{a} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Puis on fait tendre a vers $+\infty$ et on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y.$$

Au final, on a :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 1.$$

□

Compléments : table de la loi normale

Soit X la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

La table 4.1 nous donne les valeurs $P(X \leqslant t)$ où $t = \overline{a,bc}$. La première colonne correspond à a,b et la première ligne correspond à c.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

Figure 4.1 – Table des valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$

4.5.2 Loi uniforme

La loi uniforme sur $[a, b]$, notée $\mathscr{U}(()[a, b])$ a pour densité de probabilité :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a; b] \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b]. \end{cases}$$

Propriété 4.23.
Si $X \sim \mathscr{U}(()[a, b])$ alors :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

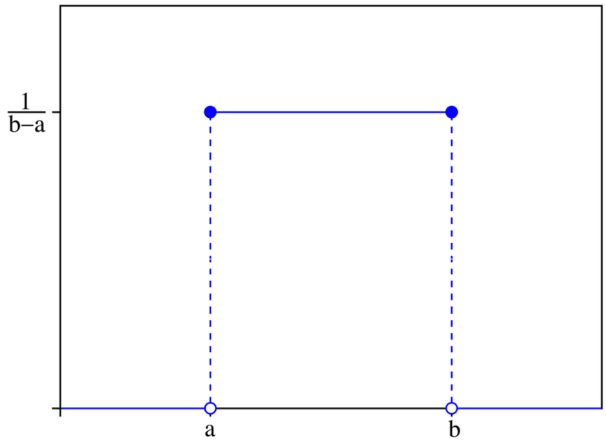


Figure 4.2 – Densité de la loi uniforme $[a, b]$

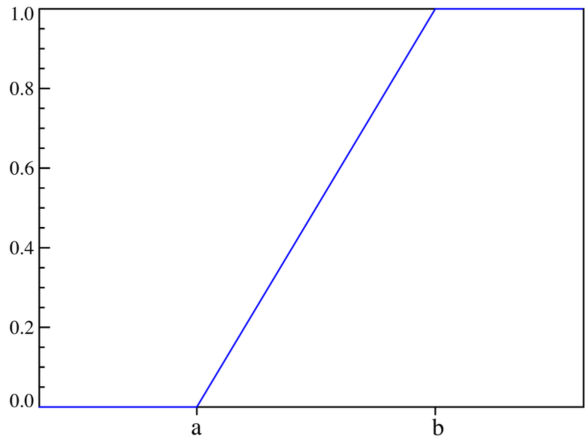


Figure 4.3 – Fonction de répartition de la loi uniforme $[a, b]$

4.5.3 Loi exponentielle

La loi exponentielle $\mathscr{E}(()\lambda)$ a pour densité de probabilité :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriété 4.24.
La densité de probabilité h de la somme de deux variables aléatoires indépendantes dont les densités f et g sont nulles pour $x \leqslant 0$, est définie par :

$$h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 4.25.
Si $X \sim \mathscr{E}(()\lambda)$ alors :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

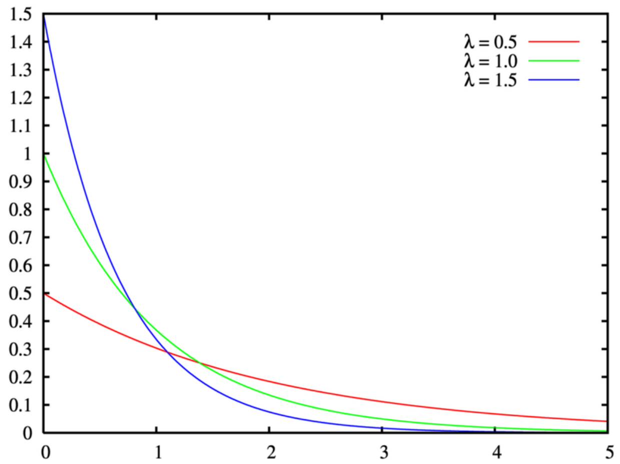


Figure 4.4 – Densité de la loi exponentielle $\mathscr{E}(()\lambda)$ pour $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$

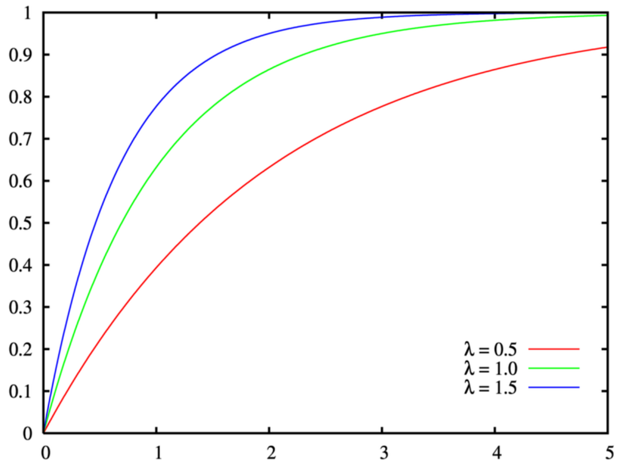


Figure 4.5 – Fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathscr{E}(()\lambda)$ pour $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1,5$

4.6 Applications

4.6.1 Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition 4.26.
Soit T une variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet. On dit que T suit la *loi de durée de vie sans vieillissement* lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge :

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h) = P(T\geqslant h).$$

Proposition 4.27.
Une variable aléatoire T suit la loi de durée sans vieillissement si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

◊ *Démonstration de la proposition 4.27.* ($\Leftarrow$) On suppose que T suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h) = \frac{P((T\geqslant t+h)\cap(T\geqslant t))}{P(T\geqslant t)}.$$

Or l'événement « $T\geqslant t+h$ » est inclus dans l'événement « $T\geqslant t$ » donc :

$$P((T\geqslant t+h)\cap(T\geqslant t)) = P(T\geqslant t+h) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}.$$

Par ailleurs :

$$P(T\geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

d'où :

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(T\geqslant h).$$

($\Rightarrow$) Réciproquement, soit T une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors, pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$ et tout réel h de $\mathbb{R}_+$:

$$P_{(T\geqslant t)}(T\geqslant t+h) = P(T\geqslant h) \Leftrightarrow P(T\geqslant t+h) = P(T\geqslant h)P(T\geqslant t).$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = 1-F(t) = 1-P(T\leqslant t) = P(T>t) = P(T\geqslant t).$$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, φ l'est aussi et on a :

$$\varphi(0) = 1-F(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t+h) = \varphi(t)\varphi(t),$$

autrement dit, φ vaut 1 en 0 et transforme les sommes en produits. Il existe donc un réel a (voir la leçon « Équations différentielles ») tel que

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Mais comme φ est en fait une probabilité, on a pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t)\leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{at}\leqslant 1 \Leftrightarrow at\leqslant 0 \Leftrightarrow a\leqslant 0.$$

On pose $\lambda = -a\in\mathbb{R}_+$. Si a était nul, on aurait, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow P(T\geqslant t) = 1$$

Ce qui signifierait que notre individu est éternel, hypothèse que l'on peut rejeter. Donc, on a bien $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en dérivant, on obtient :

$$-f(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

La variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

□

◊ *Une autre preuve pour loi de durée de vie sans vieillissement implique loi exponentielle.* Soit X une variable aléatoire dont la loi vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) \tag{4.1}$$

et G sa fonction de survie[1] Comme $G = 1 - F$, G est décroissante et continue à droite et tend vers 0 en $+\infty$. De plus, l'écriture de (4.1) suppose implicitement que $G(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ car sinon $P(\cdot \mid X > t)$ ne serait pas définie. On a aussi :

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{G(t+s)}{G(t)}. \tag{4.2}$$

Grâce à (4.2), on voit que la propriété d'absence de mémoire (4.1) équivaut à :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{G(t+s)}{G(t)} = G(s).$$

La fonction de survie G doit donc être une solution décroissante, continue à droite, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que $0 < G(t) \leqslant 1$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad G(t+s) = G(t)G(s). \tag{4.3}$$

En faisant $s = t = t0$ dans (4.3), on obtient $G(0) = G(0)^2$ et comme $G(0) > 0$, on a

$$G(0) = 1. \tag{4.4}$$

En faisant $s = t$ dans (4.3), on obtient $G(2t) = G(t)^2$, puis de proche en proche

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geqslant 0, \quad G(nt) = G(t)^n. \tag{4.5}$$

En particulier pour $t = 1/d$, $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\tfrac{n}{d}\right) = G\left(\tfrac{1}{d}\right)^n. \tag{4.6}$$

Lorsque $n = d$, (4.6) donne $G(1) = G(1/d)^d$ d'où :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad G\left(\tfrac{1}{d}\right) = G(1)^{1/d}. \tag{4.7}$$

Nous connaissons maintenant G sur l'ensemble des rationnels positifs puisque (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7) nous donnent

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G(r) = G(1)^r \tag{4.8}$$

1. la fonction de survie d'une loi exponentielle est défini de la manière suivante :

$$G(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}^+$, x est limite d'une suite décroissante (r_n) de rationnels. Comme G est continue à droite, $G(r_n)$ converge vers $G(x)$. D'autre part l'application $y \mapsto G(1)^y$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en appliquant (4.8) à r_n et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = G(1)^x. \tag{4.9}$$

A priori, la constante $G(1)$ est dans $]0;1]$. On peut écarter la valeur $G(1) = 1$ car sinon d'après (4.9), la limite en $+\infty$ de G serait 1 alors qu'elle vaut 0.

Finalement, puisque $0 < G(1) < 1$, on peut poser $G(1) = \mathrm{e}^{-a}$ pour un réel $a > 0$ (cela revient à prendre $a = -\ln G(1)$). On peut alors réécrire (4.9) sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \mathrm{e}^{-ax}.$$

La fonction de survie G est donc la même que celle de la loi exponentielle de paramètre a, donc X suit cette loi. □

4.6.2 Loi de désintégration radioactive

Selon les physiciens, la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle. Considérons l'expérience $\mathscr{E}$: « on examine un noyau à l'instant [2] t ». On note S l'événement « Ce noyau n'est pas désintégré ». D'après la loi exponentielle, il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$P(S) = P(T \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Supposons que l'on ait au départ ($t = 0$), dans notre corps radioactif, N_0 noyaux. On note X_t la variable aléatoire égale au nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. Comme chaque noyau se désintègre indépendamment aux autres, on peut affirmer que X_t suit une loi binomiale de paramètres $n = N_0$ et $p = P(S) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est donc donné par l'espérance de X_t :

$$N(t) = \mathbb{E}\left[X_t\right] = np = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

2. La constante λ est appelée « constante radioactive » du noyau

LEÇON

5

Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données.

Préambule

Niveau : collège, seconde, première « Mathématiques Spécialité », terminale STMG

Prérequis : aucun

Références :

[1] R. Noel, *Statistiques descriptives.* [url].

[2] J. Levy, *Séries statistiques.* [url].

[3] P. Brachet, *Statistiques : résumé de cours et méthodes.* Première S. [url].

[4] F. Gaudon, *Statistiques à une ou deux variables, cours, terminale STG*, 15 novembre 2009. [url].

5.1 Statistiques à une variable

5.1.1 Premières définitions et exemples

Définition 5.1. *Statistiques*

La statistique étudie certaines caractéristiques : *caractères* ou *variables* d'un ensemble fini qu'on appelle *population*. Les éléments de cette population étudiée sont appelés *individus*.

Définition 5.2. *Type de variables*

On peut classer en trois catégories les variables rencontrées :

Qualitative numérique et fait l'objet de calcul. Par exemple, des couleurs ou des sports favoris.

Quantitative discrète si la variable prend qu'un nombre fini de valeurs (on appelle *modalités* de telle valeur et on les notera x_i). Par exemple, le nombre de frères et sœurs (ne peut qu'être un nobre entier).

Quantitative continue si la variable prend ses valeurs dans un intervalle (*classe*). Par exemple, âge, taille et poids.

Exemple 5.3.

Voici une liste de 30 notes d'un Devoir Surveillé de 2nde d'un lycée parisien :

5	10	12	13	20	14
15	8	3	4	5	1
20	14	12	3	5	19
10	4	9	10	15	12
11	12	14	20	4	0

On peut regrouper ces notes par ordre croissant et on les compte :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

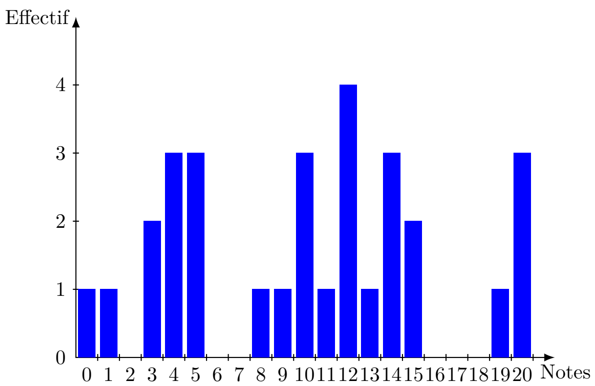
et on peut regrouper ces notes par intervalle :

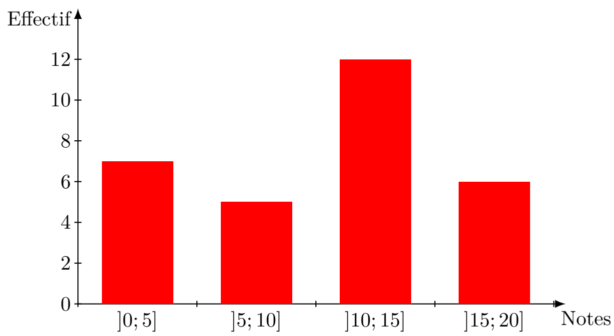
Intervalle	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30

Définition 5.4. *Représentation graphique de données statistiques*

- Si le caractère est quantitatif discret, on peut utiliser le *diagramme en bâtons* pour représenter graphiquement les données statistiques. Dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique, on trace un trait vertical dont la hauteur est proportionnelle.
- Si le caractère est quantitatif continue, on peut utiliser le *diagramme en rectangles* pour représenter graphiquement les données statistiques. Dans un repère orthogonal, la base des rectangles est proportionnelle à la longueur de l'intervalle et la hauteur est proportionnelle à l'effectif.
- Si le caractère est qualitatif, on utilise *les diagrammes circulaires.*

Exemple 5.5.
On donne ci-dessous, la représentation graphique de la série statistique des classements de notes par ordre croissant et par intervalle de 5 notes.





5.1.2 Effectif et fréquence

Définition 5.6. *Effectif*
L'*effectif* d'une classe ou d'une modalité est le nombre d'individu de cette classe ou de cette modalité. Généralement, on note n_i l'effectif de la classe numéro i (ou de la modalité x_i).

L'*effectif total* est la somme des effectifs de toutes les classes. On le note souvent N.

Exemple 5.7.
Dans l'exemple précédent,

$$N = \sum_{i=1}^{5} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 7 + 5 + 12 + 8 = 30.$$

Définition 5.8. *Effectif cumulé*
L'*effectif cumulé* d'une modalité est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieurs ou égales.

Définition 5.9. *Fréquence*

La *fréquence* notée f_i de la classe i (ou de la modalité x_i) est le rapport $f_i = \frac{n_i}{N}$, la fréquence d'une classe est un nombre de l'intervalle $[0;1]$.

Définition 5.10.

La *fréquence cumulée* d'une modalité est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales.

Exemple 5.11.
Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3
Effectif cumul.	1	2	2	4	7	10	10	10	11	12	15	16	20	21	24	26	26	26	26	27	30

(par exemple, 20 personnes ont une note inférieure ou égale à 12) et

Intervalle	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30
Effectif cumul.	7	12	24	30	30

(par exemple 12 personnes ont en dessous de la moyenne).

5.1.3 Etendue et mode d'une série statistique

Définition 5.12. *Etendue d'une série statistique*

L'*étendue d'une série statistique* est la différence entre la plus petite modalité du caractère et la plus grande modalité.

Exemple 5.13.
Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

L'étendue de cette série est $20 - 0 = 20$.

Définition 5.14. *Mode d'une série statistique*

Dans le cas continu, on dit qu'une classe est *modale* si elle a le plus grand effectif parmi toutes les classes.

Dans le cas discret, le mode est la valeur de plus grand effectif.

Exemple 5.15.
Dans cette série statistique, on a :

Intervalle	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Effectif	7	5	12	6	30

La classe modale de cette série statistique est $[10;15[$.

5.1.4 Paramètre de position

Moyenne

Définition 5.16. *Moyenne*

Dans le cas discret, on appelle *moyenne* d'une série statistique d'effectif total N, le réel

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N}.$$

Exemple 5.17.
Reprenons les données de l'exemple précédent. On a :

Note	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Effectif	1	1	0	2	3	3	0	0	1	1	3	1	4	1	3	2	0	0	0	1	3

La moyenne de la série statistique est :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1\times 1 + 0\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 3\times 5 + 0\times 6 + 0\times 7 + 1\times 8 + 1\times 9 + 3\times 10 + 11\times 1 + 12\times 4 + 13\times 1 + 14\times 3 +}{30} \\ &= \frac{304}{30} \simeq 10,13.\end{aligned}$$

Remarque 5.18.
Pour calculer la moyenne d'une série statistique continu, on prend comme valeur de caractère *le milieu de chaque classe.*

Propriétés 5.19.

1. Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, on augmente la moyenne de cette série par b.
2. Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, la moyenne de cette série est aussi multipliée ou divisée par a.
3. Si une population d'effectif N est composée d'une partie d'effectif N_1 et de moyenne $\overline{x}_1$ et d'une autre partie d'effectif N_2 et de moyenne $\overline{x}_2$ alors la moyenne $\overline{x}$ de la population totale est telle que :
$$\overline{x} = \frac{N_1\overline{x}_1 + N_2\overline{x}_2}{N}.$$

Exemple 5.20.
Si, dans une classe, les 15 garçons d'une classe mesurent en moyenne 182 cm et si les 20 filles mesurent en moyenne 168 cm alors la taille moyenne d'un élève de cette classe est égale à

$$\frac{15\times 182 + 20\times 168}{15+20} = 174 \text{ cm}.$$

Médiane

Définition 5.21.

La *médiane* est un paramètre de position qui permet de couper la population étudiée en deux groupes contenant le même nombre d'individus.

Exemple 5.22.
On reprend la liste des 30 notes d'un Devoir Surveillé de 2nde d'un lycée parisien :

5	10	12	13	20	14
15	8	3	4	5	1
20	14	12	3	5	19
10	4	9	10	15	12
11	12	14	20	4	0

Pour trouver la médiane, on range les notes par ordre croissant.

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	10	11	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

Comme il y a 30 notes, la médiane correspond à la moyenne de la 15ᵉ note et de la 16ᵉ de cette liste, d'où :

$$\begin{array}{|cccccc|} 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 8 & 9 \\ 10 & 10 & \boxed{10} & \boxed{11} & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 13 & 14 & 14 & 14 \\ 15 & 15 & 19 & 20 & 20 & 20 \end{array}, \quad \overline{x} = \frac{10+11}{2} = 10{,}5.$$

Remarque 5.23.
En général, la moyenne et la médiane d'une série statistique sont deux valeurs différentes.

5.1.5 Paramètre de dispersion

Associé à la moyenne

Définition 5.24. *Variance*
On appelle *variance* d'une série statistique d'effectif total N, et de moyenne $\overline{x}$, le réel :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \overline{x})^2}{N}.$$

Définition 5.25. *Ecart-type*
On appelle l'*écart-type* de la série, le réel $\sigma = \sqrt{V}$.

Exemple 5.26.
Dans l'exemple des notes, on peut montrer que :

$$V = \frac{7286}{225} \simeq 32{,}115$$

et

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{32{,}115} \simeq 5{,}66.$$

Propriétés 5.27.
1. Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, l'écart-type reste inchangé.
2. Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, l'écart-type est multiplié ou divisé par $|a|$.

Associé à la médiane

Définition 5.28.
Soit une série statistique de médiane M dont la liste des valeurs est rangée dans l'ordre croissant. En coupant la liste en deux sous-séries de même effectif,

— on appelle *premier quartile* le réel noté Q_1 égal à la médiane de la sous-série inférieure ;

— on appelle *troisième quartile* le réel noté Q_3 égal à la médiane de la sous-série supérieure.

— L'*écart-interquartile* est égal à $Q_3 - Q_1$.

— $]Q_1; Q_3[$ est appelé *intervalle interquartile.*

Remarque 5.29.

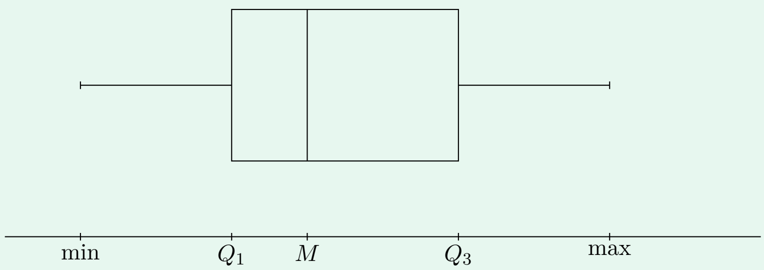
— 25% de la population admet une valeur du caractère entre min et Q_1,

— 25% de la population admet une valeur du caractère entre Q_1 et M,

— 25% de la population admet une valeur du caractère entre M et Q_3,

— 25% de la population admet une valeur du caractère entre Q_3 et max.

Définition 5.30. *Diagramme en boites*
Le *diagramme en boites* d'une série se construit de la manière suivante :



Exemple 5.31.
On reprend la liste ordonnée de l'exemple précédent :

0	1	3	3	4	4
4	5	5	5	8	9
10	10	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	12
12	12	13	14	14	14
15	15	19	20	20	20

On peut immédiatement voir que $Q_1 = \dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$ et $Q_3 = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5$. Donc, on a la construction du diagramme en bâtons suivant (voir la figure 5.1) :

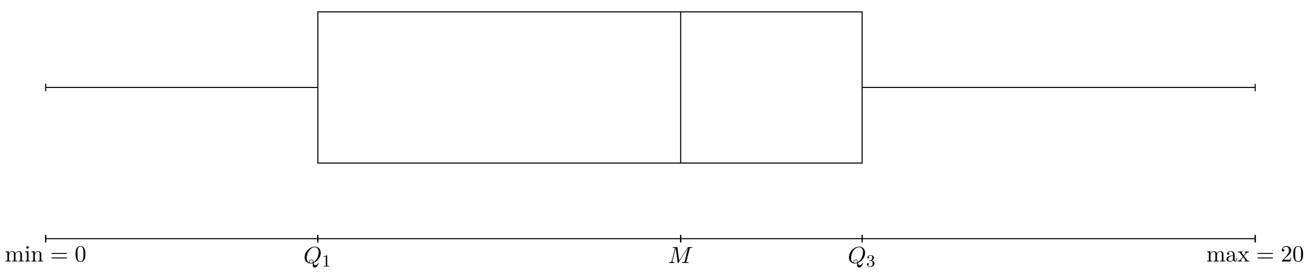


Figure 5.1 – Construction du diagramme en boîte

5.1.6 Interprétation

▶ **Méthode 5.32.** *Résumer une série statistique*
On peut résumer une série statistique, c'est-à-dire en donner une tendance globale, par

- le couple médiane-écart interquartile, qui n'est pas sensible aux valeurs extrêmes : on le privilégie donc quand on étudie une série dont les valeurs extrêmes sont moins *importantes* ou moins *significatives* que les valeurs *centrales* ;
- le couple moyenne-écart-type, qui est sensible aux valeurs extrêmes : on le privilégie donc quand on étudie une série dont les valeurs extrêmes sont aussi *importantes* ou aussi *significatives* que les autres.

Dans les deux cas, on utilise un indicateur de position (la médiane ou la moyenne) et un indicateur de dispersion (l'écart interquartile ou l'écart-type.

Remarque 5.33.
La moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ s'expriment dans la même unité que les valeurs de la série.

Cela a un sens de parler des intervalles $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$, $[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma]$..., qui sont souvent utilisés en statistiques.

5.2 Statistiques à deux variables

5.2.1 Vocabulaire

Définition 5.34.

- Soient x et y deux caractères quantitatifs d'une même population. À chaque individu de la population, on associe un couple $(x_i;y_i)$ où x_i et y_i pour $1\leqslant i\leqslant n$ avec n entier naturel sont les valeurs prises respectivement par x et y. L'ensemble de ces couples constitue une *série statistique à deux variables* x et y.
- Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i;y_i)$ est appelé *nuage de points* associé à la série statistique.
- Soit une série statistique à deux variables x et y de moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$. Le point G de coordonnées $(\overline{x};\overline{y})$ avec :

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\quad\text{et}\quad\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

  est appelé le *point moyen* de nuage de points associé à la série statistique.

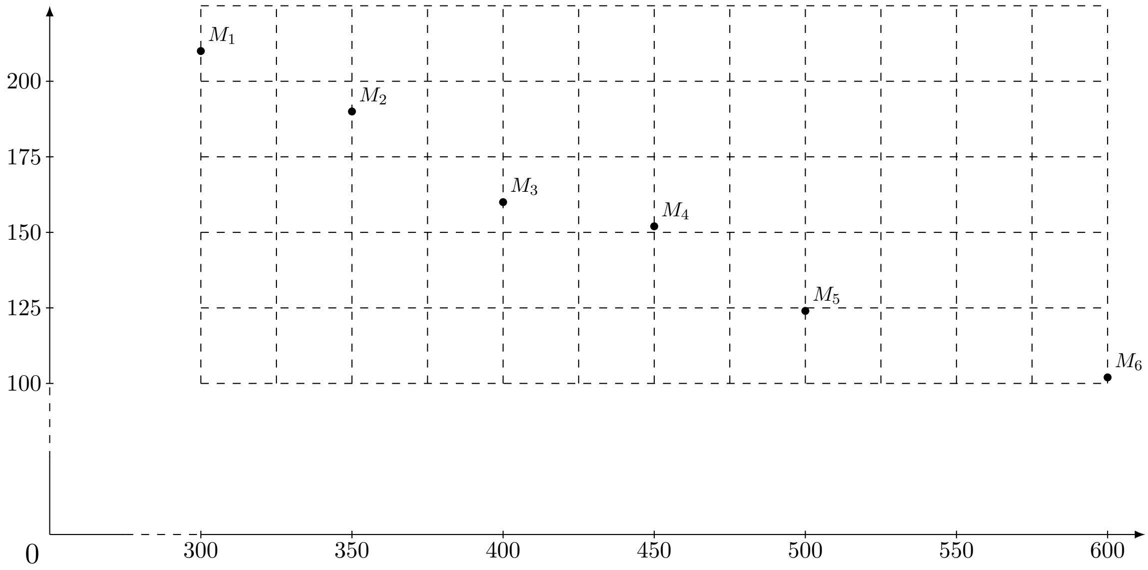
Exemple 5.35.
Un magasin réalise une étude sur l'influence du prix de vente sur le nombre de machines à laver vendues au cours d'une année. Le tableau suivant donne les résultats de cette étude :

Prix x_i en euros	300	350	400	450	500	600
Nombre de machines vendues	210	190	160	152	124	102

Le nuage de points associé à cette série est constitue des points M_i pour i allant de 1 à 6 dont les coordonnées sont $(300;210)$, $(350;190)$, ..., $(600;102)$.

Le point moyen associé à ce nuage de points est le point G de coordonnées $(\overline{x};\overline{y})$ données par :

$$\overline{x}=\frac{300+350+\cdots+600}{6}=\frac{2600}{6}\approx 433,3\quad\text{et}\quad\overline{y}=\frac{210+190+\cdots+102}{6}=\frac{938}{6}\approx 156,3.$$



5.2.2 Ajustement d'un nuage de points

Définition 5.36.
Toute droite passant par le point moyen du nuage et « résumant approximativement » le nuage est appelée *droite d'ajustement affine* du nuage de points.

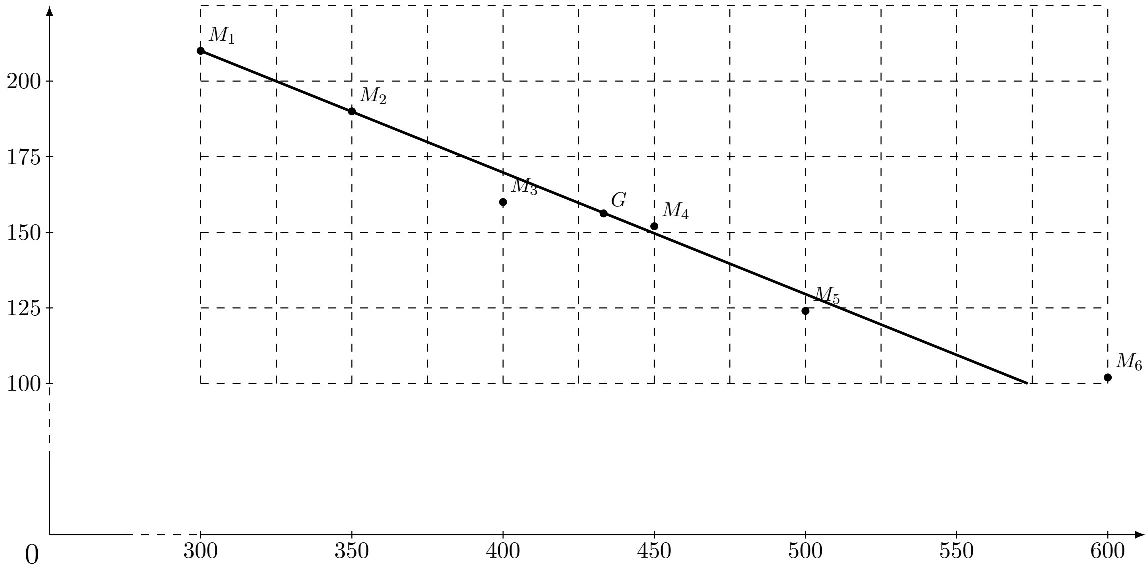
Remarque 5.37.
Il existe d'autres types d'ajustement : dans certains cas, on peut observer que visiblement une droite ne convient pas mais que le nuage de points semble être approché par un autre type de courbe, parabole par exemple. En outre, certains nuages peuvent ne pas sembler être approchables par une quelconque courbe auquel cas les deux variables ne sont pas reliées entre elles.

5.2.3 Détermination d'une équation de droite d'ajustement affine

Méthode graphique au jugé

Propriété 5.38.
On trace « au jugé » une droite passant par le point moyen du nuage qui « semble résumer » le nuage de points. C'est une méthode simple mais qui dépend de la droite tracée.

(voir graphique page suivante)



Méthode de Mayer

Propriété 5.39.
On sépare le nuage en deux sous nuages et on calcule les coordonnées des points moyens des deux sous nuages. La droite de Mayer est al droite passant par ces deux points. On peut montrer qu'elle passe aussi par le point moyen du nuage.

Exemple 5.40.
Dans l'exemple précédent, on définit les deux sous nuages constitués des points M_1, M_2 et M_3 pour le premier et des points M_4, M_5 et M_6 pour le second nuage.

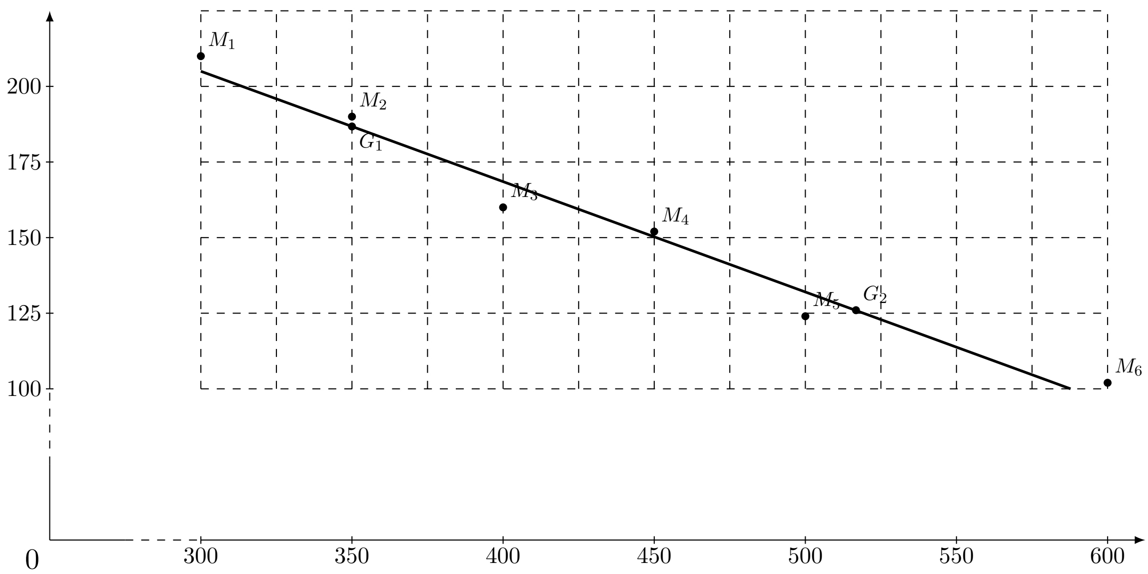
Le point moyen G_1 du premier nuage a donc pour coordonnées :

$$\overline{x}_1 = \frac{300+350+400}{3} = \frac{1050}{3} = 350 \quad \text{et} \quad \overline{y}_1 = \frac{210+190+160}{3} = \frac{560}{3} \approx 186,67.$$

Le point moyen G_2 du deuxième nuage a pour coordonnées :

$$\overline{x}_2 = \frac{450+500+600}{3} = \frac{1550}{3} \approx 516,67 \quad \text{et} \quad \overline{y}_2 = \frac{152+124+102}{3} = \frac{378}{3} = 126.$$

La droite de Mayer est alors la droite (G_1G_2).



Méthode des moindres carrés

Propriété 5.41.
Avec les notations précédentes, étant donné un nuage de n points M_n, il existe une droite passant par le point moyen G et telle que la somme des carrés des écarts (ou *résidus*) $P_1M_1^2+P_2M_2^2+\cdots+P_nM_n^2$ soit minimale. Cette droite est appelée *droite de régression de y en x*. On peut montrer que son équation réduite est $y=mx+p$ avec :

$$m=\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_p-\overline{x})^2}$$

et

$$p=\overline{y}-m\overline{x}.$$

Exemple 5.42.
On considère la série statistique à deux variables suivante :

x_i	5	10	15	20	25
y_1	13	23	34	44	50

On calcule $\overline{x}$ et $\overline{y}$:

$$\overline{x}=\frac{5+10+15+20+25}{5}=15 \quad \text{et} \quad \overline{y}=\frac{13+23+34+44+50}{5}=32,8.$$

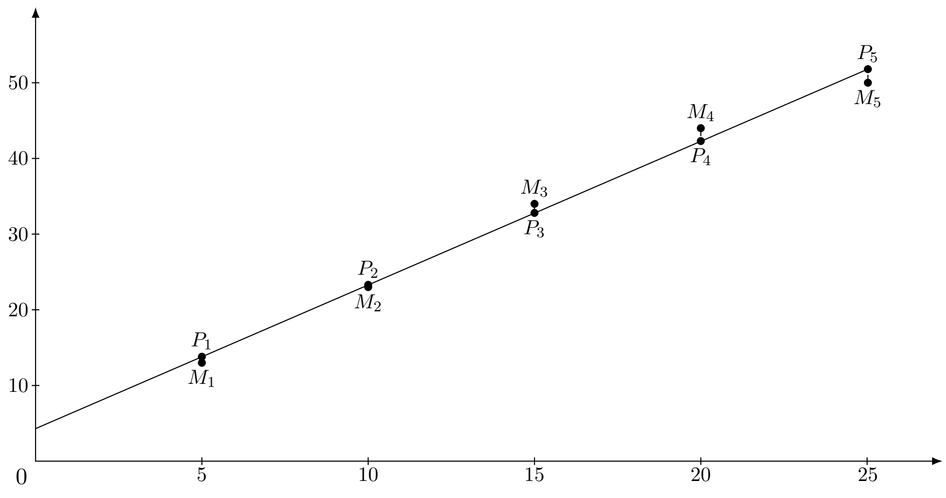
On peut dresser le tableau suivant :

i	x_i	y_i	$(x_i-\overline{x})$	$(y_i-\overline{y})$	$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$(x_i-\overline{x})^2$
1	5	13	-10	$-19,8$	198	100
2	10	23	-5	$-9,8$	49	25
3	15	34	0	$1,2$	0	0
4	20	44	5	$11,2$	$57,5$	25
5	25	50	10	$17,2$	172	100

On a ainsi :

$$m=\frac{198+49+0+57,5+172}{100+25+0+25+100}=\frac{468,5}{250}=1,875$$

et $p=32,8-15\times 1,875=4,675$.



On peut obtenir la droite de régression linéaire avec la TI-82 en allant dans le menu `Stats > Edit`. On entre les valeurs x_i dans la colonne `L1` et les valeurs y_i dans la colonne `L2`. Puis dans le mode prinicipal, on va dans `Stat > Calc`, on choisit `LinReg(ax+b)` et on tape à l'écran les deux listes `L1` et `L2`.

Compléments :

Définition 5.43. *Covariance*

On appelle *covariance* du couple (X, Y), le réel :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Définition 5.44. *Coefficient de corrélation linéaire*

On appelle *coefficient de corrélation linéaire*, le réel :

$$r = \rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Propriété 5.45.

1. $\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$ d'après la formule de Koenig.
2. La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive.
3. $|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$ et donc $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$.
4. $|r| = |\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si les points du nuages sont alignés.

Théorème 5.46. *Méthode des moindres carrés*

La droite d'équation

$$y - \overline{Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)^2}(x - \overline{X})$$

passe par le point moyen et est la droite d'équation réduite de la forme $y = ax + b$ qui minimise la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i + b - y_i)^2$$

pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit :

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)^2} \qquad \text{et} \qquad b = \overline{Y} - \overline{X}\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)^2}$$

réalisent ce minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration du théorème 5.46, première méthode. ◊ On pose

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b]^2$$

et on introduit $z = y - ax - b$, on peut alors réécrire $S(a, b)$ comme

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

Or, on sait que

$$\mathbb{V}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - z)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \overline{z}^2$$

et, par linéarité de la moyenne $\overline{z} = \overline{y} - a\overline{x} - b$. Donc, minimiser $S(a, b)$ revient à minimiser $\sum z_i^2 = n(\mathbb{V}(z) + \overline{z}^2)$.

On va donc minimiser $n\mathbb{V}(z)$. On a :

$$z_i - \overline{z} = y_i - ax_i - b - (\overline{y} - a\overline{x} - b) = (y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x}).$$

D'où :

$$\begin{aligned} n\mathbb{V}(z) &= \sum_{i=1}^n (z_i - \overline{z}) = \sum_{i=1}^n [(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \overline{y})^2 - 2a(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + a^2(x_i - \overline{x})^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2 - 2a\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + a^2\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2. \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

On a finalement :

$$\mathbb{V}(z) = \mathbb{V}(x)a^2 - 2\operatorname{Cov}(x, y) + \mathbb{V}(y).$$

On reconnaît un trinôme du second degré. On va l'écrire sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(z) &= \left(\sigma(x)a - \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 + \mathbb{V}(y) - \left(\frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 \\ &= \left(\sigma(x)a - \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 + \frac{\mathbb{V}(x)\mathbb{V}(y) - \operatorname{Cov}(x, y)^2}{\mathbb{V}(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{V}(z)$ est minimal lorsque $\left(\sigma(x)a - \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma(x)}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\mathbb{V}(x)}$ et le minimum de $\mathbb{V}(z)$ est

$$\frac{\mathbb{V}(x)\mathbb{V}(y) - \operatorname{Cov}(x, y)^2}{\mathbb{V}(x)}.$$

On va maintenant minimiser $\overline{z}^2$. On a : $\overline{z} = \overline{y} - a\overline{x}$. Donc $\overline{z}$ est minimal si $b = \overline{y} - a\overline{x}$ et le minimum de $\overline{z}$ est 0.

D'où la droite de régression de y en x a pour équation $y = ax + b$ où

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\mathbb{V}(x)} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

□

Démonstration du théorème 5.46, seconde méthode. ◊ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n f_i(ax_i + b - y_i)^2.$$

C'est une fonction polynôme de degré 2 que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \left(\sum_{i=1}^n f_i x_i^2\right) a^2 + b^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n f_i x_i\right) ab \\ &\qquad - 2\left(\sum_{i=1}^n f_i x_i y_i\right) a - 2\left(\sum_{i=1}^n f_i y_i\right) b + \sum_{i=1}^n f_i y_i^2 \\ f(a, b) &= \overline{X^2}a^2 + b^2 + 2\overline{X}ab - 2\overline{XY}a - 2\overline{Y}b + \overline{Y^2}. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 2\overline{X^2}a + 2\overline{X}b - 2\overline{XY} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 2\overline{X}a + 2b - 2\overline{Y}$$

Elles s'annulent simultanément en l'unique point critique défini par :

$$a_0 = \frac{-\overline{X}\cdot\overline{Y}+\overline{XY}}{\overline{X^2}-\overline{X}^2} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}$$
$$b_0 = \frac{\overline{XY}\cdot\overline{X}+\overline{Y}\cdot\overline{X^2}}{\overline{X^2}-\overline{X}^2} = \overline{Y}-\overline{X}\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)^2}.$$

Les dérivées partielles secondes sont données par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = 2\overline{X^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a,b) = 2\overline{X}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = 2.$$

Avec les notations de Monge, au point (a_0,b_0), on a :

$$rt-s^2 = 4\overline{X^2}-4\overline{X}^2 = 4\sigma(X)^2 > 0$$

ce qui assure qu'on a bien un minimum local en (a_0,b_0). De plus, un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (a_0,b_0) donne :

$$f(a,b) = f(a_0,b_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a_0,b_0)(a-a_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a_0,b_0)(a-a_0)(b-b_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a_0,b_0)(b-b_0)^2 \geqslant f(a_0,b_0)$$

puisque les termes d'ordre supérieur sont nuls (fonction polynôme de degré 2) et la forme quadratique est strictement positive ($rt-s^2>0$) et ainsi on a bien un maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

La droite d'équation réduite $y = a_0x+b_0$ est la droite proposée dans l'énoncé et passe clairement par le point moyen de la série statistique. □

Définition 5.47. *Droite d'ajustement*

- La droite définie ci-dessus est appelée *droite d'ajustement* (ou *droite de régression* de Y en X.
- La somme
$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ax_i+b-y_i)^2$$
est appelée *résidu quadratique*.

Remarques 5.48.

1. La droite d'équation
$$x-\overline{X} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(Y)^2}(y-\overline{Y})$$
minimise la somme
$$\sum_{i=1}^{n} f_i(ay_i+b-x_i)^2$$
et s'appelle droite d'ajustement de X en Y.
2. Notons $Z=(1,\dots,1)$ le caractère constant égal à 1 sur la population commune à X et Y. Ajuster Y en X revient à considérer le projeté orthogonal de Y sur le sous-espace (X,Z) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.
3. Lorsque $|r| = |\rho(X,Y)| > 0{,}9$ (valeur dépendant des auteurs et des besoins), on considère que l'ajustement affine de Y en X est satisfaisant (sinon, il faut déterminer un autre type d'ajustement).

LEÇON

6

Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$, nombres premiers.

Préambule

Niveau : collège et terminale « Mathématiques Expertes »

Prérequis : notions d'arithmétique : division, nombres entiers, construction de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Références :

[1] Contributeurs de Wikipédia, *Liste des critères de divisibilité*. Wikipédia.

[2] C. Parfenoff, *Division euclidienne, division décimale*. Classe de Sixième. [url].

[3] J. Onillon, *Vestiges d'une terminale S — Résolution générale des équations diophantiennes*. [url].

[4] Zauctore, *Équations diophantiennes du premier degré*. 3 octobre 2007. [url].

[5] D.-J. Mercier, *CAPES/AGREG Maths, Préparation intensive à l'entretien*. [url].

[6] F. Herbaut, *Souvenirs d'oraux du CAPES 2011*. Académie de Nice. [url].

[7] Contributeurs de Wikipédia, *Équation diophantienne $ax + by = c$*. Wikipédia.

[8] X. Delahaye, *Conjectures*. Terminale S. [url].

[9] J.-P. Quelen, *Petit théorème de Fermat et codage RSA*. 15 juillet 2011.

[10] M. Lezen, *Leçon n° 14 : Congruences dans $\mathbb{Z}$. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*. 2011. [url].

6.1 Multiples et diviseurs

6.1.1 Définition

Définition 6.1.
Soient a et b deux entiers relatifs. a est un multiple de b, si et seulement si, il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

On dit aussi que :

- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- b divise a.

Exemples 6.2.

1. 54 est un multiple de 3 car $54 = 18 \times 3$.
2. -5 divise 45 car $45 = (-9) \times (-5)$.

6.1.2 Propriétés

Propriétés 6.3.
1. 0 est un multiple de tout entier.
2. 1 divise tout entier.
3. Si a est un multiple de b et si $a \neq 0$ alors $|a| \geqslant |b|$.
4. Si a divise b et si b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$ avec a et b non nuls.

6.1.3 Règles de divisibilité

Toutes les règles de divisibilité peuvent être démontrées par la congruence.

Propriétés 6.4.
1. Un entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.
2. Un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
3. Un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.
4. Un entier est divisible par 25 s'il se termine par 00, 25, 50, 75.
5. Un entier est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

Démonstration du critère de divisibilité par 2. ♢ Soit N un nombre entier. Il existe donc un B et a_0 tel que

$$N = 10B + a_0$$

avec $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$. Or $10B$ est toujours multiple de 2 donc N est multiple de 2 si et seulement si a_0 est multiple de 2. □

Exemples 6.5.
1. 1932 est divisible par 4 car 32 est divisible par 4.
2. Par contre, 1714 n'est pas divisible par 4 car 14 n'est pas divisible par 4.

Propriétés 6.6.
1. Un entier est divisible par 3 si la somme des chiffres est divisible par 3.
2. Un entier est divisible par 9 si la somme des chiffres est divisible par 9.

Démonstration du critère de divisibilité par 3. ♢ Soit N un entier naturel divisible par 3. On a alors :

$$3 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod 3.$$

On pose

$$N = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n.$$

Or $10 \equiv 1 \pmod 3$ donc

$$N \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod 3.$$

Ainsi, lorsqu'un nombre est divisible par 3, la somme des chiffres de ce nombre est divisible par 3. □

Exemples 6.7.

1. 8232 est divisible par 3 car $8+2+3+5=15$ et 15 est divisible par 3.
2. 4365 est divisible par 9 car $4+3+6+5=18$ et 18 est divisible par 9.

Propriété 6.8.
D'une façon générale un entier est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11.

Exemples 6.9.

1. 6457 est divisible par 11 car :
$$(7+4)-(5+6)=11-11=0$$
et 0 est divisible par 11.
2. 4939 est divisible par 11 car :
$$(9+9)-(3+4)=18-7=11$$
et 11 est divisible par 11.

Propriété 6.10. *Critère de divisibilité par 7*
Un nombre est *divisible par* 7 si et seulement si le résultat de la soustraction du *nombre de dizaines* par le double du chiffre des unités est multiple de 7.

La démonstration nécessite la connaissance du théorème de Gauss (voir théorème 7.17).

Démonstration du critère de divisibilité par 7. ◊ Soit N un nombre entier divisible par 7. On pose
$$N=a_0+a_1\times 10+\cdots+a_n\times 10^n.$$
On a :
$$7\mid 10(a_1+a_2\times 10+\cdots+a_n\times 10^{n-1}-2a_0).$$
Or 7 et 10 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :
$$7\mid a_1+a_2\times 10+\cdots+a_n\times 10^{n-1}-2a_0.$$
Réciproquement si
$$7\mid a_1+a_2\times 10+\cdots+a_n\times 10^{n-1}-2a_0$$
alors
$$7\mid 10(a_1+a_2\times 10+\cdots+a_n\times 10^{n-1}-2a_0)$$
Or, $7\mid 21$ donc
$$7\mid a_1\times 10+a_2\times 10^2+\cdots+a_n\times 10^n-20a_0+21a_0.$$
On obtient ainsi $7\mid N$. □

Exemple 6.11.
252 est divisible par 7 car son nombre de dizaine est 25, son chiffre des unités est 2 et
$$25-2\times 2=25-4=21\quad\text{(divisible par 7)}.$$

Exemple 6.12.
Grâce aux règles de divisibilité, on montre facilement que :

1. Les diviseurs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20
2. Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
3. Les diviseurs de 120 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120

6.1.4 Décompositions en facteurs premiers

Théorème 6.13.
Soient a et b deux entiers naturels tels que :

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}.$$

Alors :

$$\&textPGCD(a,b) = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$$

avec $\delta_i = \min(\{\alpha_i, \beta_i\})$.

Démonstration du théorème 6.13. ♢ Soit $d = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$. On vérifie que d est bien un diviseur commun de a et de b. Réciproquement, soit d' un diviseur commun de a et de b. Tout facteur premier p de d est aussi un facteur premier de a et de b. Si p_i^{δ} divise a et b alors $\delta \leqslant \alpha_i$ et $\delta \leqslant \beta_i$ onc :

$$\delta \leqslant \delta_i = \min(\{\alpha_i, \beta_i\}).$$

Cela entraîne que d' est un diviseur de d. Donc d est le $\&textPGCD$ de a et de b. □

6.1.5 Un exercice d'application

▶ **Exercice 6.14.**

1. Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que :

$$x^2 - 2xy = 15.$$

2. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n-3)$ divise $n+5$.

Solution. ♢

1. On cherche à mettre le terme de droite en facteur de façon à faire apparaître des diviseurs de 15. En factorisant, on trouve :

$$x(x-2y) = 15.$$

Comme x et y sont des entiers naturels, on a la relation suivante : $x \geqslant x - 2y$. De plus, les diviseurs de 15 sont :

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}.$$

Les décompositions possible sont donc :

$$\begin{cases} x = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = 15 \\ 15 - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5 \\ 5 - 2y = 3 \end{cases}.$$

On obtient alors (après calculs) les couples solutions : $(15,7)$ et $(5,1)$.

2. Si $(n-3)$ divise $(n+5)$ alors il existe un entier k tel que :

$$n + 5 = k(n-3)$$

On cherche à factoriser par $(n-3)$ en faisant ressortir ce terme à gauche :

$$\begin{aligned} (n-3) + 8 &= k(n-3) \\ k(n-3) - (n-3) &= 8 \\ (n-3)(k-1) &= 8 \end{aligned}$$

donc $(n-3)$ est un diviseur de 8. L'ensemble des diviseurs de 8 dans $\mathbb{Z}$ est :

$$D_8 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}.$$

On a donc le tableau suivant correspond aux valeurs possibles de n :

$n-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
n	-5	-1	1	2	4	5	7	11

□

6.1.6 Opérations sur les multiples

Théorème 6.15.
Soit trois entiers relatifs a, b et c.
Si a divise b et c alors a divise $a+b$, $a-b$ ou toutes combinaison linéaire de b et de c.

Démonstration. ♢ On sait que a divise b et c, donc il existe deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$b = ka \quad \text{et} \quad c = k'a.$$

On a alors :

$$b+c = (k+k')a, \quad b-c = (k-k')a \quad \text{et} \quad \alpha b + \beta c = (\alpha k + \beta k')a.$$

Donc a divise $b+c$, $b-c$ et $\alpha b + \beta c$. □

Exemple 6.16.
Soit k un entier naturel, on pose $a = 9k+2$ et $b = 12k+1$. On cherche les diviseurs positifs communs à a et b.

Soit d un diviseur commun à a et b. Comme d divise a et b, il divise $c = 4a - 3b$, soit :

$$c = 4(9k+2) - 3(12k+1) = 36k + 8 - 36k - 3 = 5$$

donc d divise 5. Comme 5 n'a que 2 diviseurs positifs, 1 et 5, on a alors $d = 1$ et $d = 5$.

Les diviseurs positifs possibles communs à a et b sont 1 et 5.

6.1.7 Division euclidienne

Définition 6.17.
Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

On appelle division euclidienne de a par b, l'opération qui au couple (a, b) associe le couple (q, r) tels que :

$$a = bq + r \quad \text{avec } 0 \leqslant r < b.$$

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemples 6.18.
1. La division euclidienne de 114 par 8 : $114 = 8 \times 14 + 2$
2. La division de -17 par 3 : $17 = 3 \times (-6) + 1$.

► **Exercice 6.19.**
1. Trouver tous les entiers qui divisés par 5 donne un quotient égal à 3 fois le reste.
2. Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer le diviseur b.

Solution. ♢

1. Soit a l'entier cherché. On divise a par 5, on a alors :
$$a = 5q + r \qquad \text{avec } 0 \leqslant r < 5$$
Comme $q = 3r$, on a :
$$a = 15r + r = 16r \qquad \text{avec } 0 \leqslant r < 5$$
On trouve toutes les valeurs de a en faisant varier r de 0 à 4 compris, on a alors l'ensemble solution suivant :
$$S = \{0, 16, 32, 48, 64\}.$$
2. Écrivons les deux divisions, en notant q et q' les quotients respectifs :
$$\begin{aligned} 2bq + 16 &= bq' + 5 \qquad \text{avec } b > 8 \\ b(2q - q') &= -11 \\ b(q' - 2q) &= 11 \end{aligned}$$
On en déduit que p est un multiple positif non nul de 11, supérieur à 8, donc : $b = 11$.

□

Algorithme. On propose un algorithme sur Xcas qui effectue une division euclidienne par soustraction successives :

```
diveucl(a,b) fonction
  local r,q;
  si b < 0 alors
    b := -b;
    a := -a;
  fsi
  q := 0;
  r := a;
  si a >= 0 alors
    tantque r>=b faire
      r := r-b;
      q := q+1;
    ftantque
   sinon
     tantque r<0 faire
      r := r+b;
      q := q-1;
     ftantque
  fsi
    afficher(q);
    afficher(r);
ffonction:;
```

6.2 Nombres premiers

6.2.1 Définition

Définition 6.20.
Soit $p \geqslant 2$ un nombre entier naturel. On dit que p est un nombre *premier* si p admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples 6.21.

1. 7 est un nombre premier car il admet comme diviseurs 1 et 7.
2. 13 est un nombre premier car il admet comme diviseurs 1 et 13.
3. 9 n'est pas un nombre premier car il admet trois diviseurs : 1, 3 et 9.

Remarques 6.22.

1. La définition exclut 1 comme potentiel nombre premier. il n'a qu'un seul diviseur distinct, lui-même.
2. Attention : ne pas confondre nombre premier avec nombres premiers entre eux. On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux si $\&textPGCD(a, b) = 1$, ou ils n'ont comme plus grand diviseur commun 1.

6.2.2 Quelques propriétés sur les nombres premiers

Propriété 6.23.
L'ensemble des nombres premiers est un ensemble infini.

Démonstration. ◊ On suppose que l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers est un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments (2 est un nombre premier car 2 a pour diviseurs 1 et 2).

Ainsi :

$$P = \{p_1, \dots, p_n\}$$

où n est un nombre entier naturel non nul et p_1, …, p_n sont des nombres premiers. Á partir des éléments de $\mathscr{P}$, on peut construire $N := p_1 \times \cdots \times p_n$. On a alors : $N + 1 := (p_1 \times \cdots \times p_n) + 1$ et quand on fait la division euclidienne de $N + 1$ avec p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on trouve comme reste 1. On peut donc affirmer que $N + 1$ est donc un nombre premier. Il y a donc une contradiction avec l'hypothèse de départ car on peut donc, à partir de n nombres premiers, fabriquer un nouveau nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est donc un ensemble infini. □

Propriété 6.24.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; n est premier si, et seulement si, n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Démonstration. ◊ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

— On suppose que n est premier, n admet alors exactement deux diviseurs 1 et n. 1 est donc le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

— Réciproquement, on suppose que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ et on montre (par un raisonnement par l'absurde) que n est premier.

Supposons que n n'est pas premier. L'ensemble des diviseurs de n (dans $\mathbb{N}$) autres que 1 et n étant non vide, il admet un plus petit élément m. On peut montrer que m est un nombre premier par un raisonnement par l'absurde.

Supposons que m ne soit pas premier alors il aurait comme diviseur k avec $1 \leqslant k \leqslant m$. Or comme $m \mid n$ et que $k \mid m$, on aurait $k \mid n$. Ce qui est absurde car le plus petit diviseur de n est m. m n'a donc comme diviseurs 1 et m, m est donc premier.

m divise n et m premier donc il existe un k tel que $1 < m \leqslant k < n$ et $n = mk$. Comme $n = mk$ et $1 < m \leqslant k < n$, on en déduit donc :

$$1 < m \times m \leqslant mk \Leftrightarrow 1 < m^2 \leqslant n.$$

Comme $m > 0$ et $n > 0$, on peut appliquer la racine carrée dans les deux membres de l'inégalité $m \leqslant \sqrt{n}$. Ce qui est absurde car n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Donc : n est premier.

□

Théorème 6.25. *Lemme d'Euclide*
Si un nombre premier p divise le produit de deux nombres entiers b et c, alors p divise b ou c.

Démonstration. ◊ Si p ne divise pas a alors p et a sont premiers entre eux. En utilisant le lemme de Gauss (voir remarque), on en déduit que $p \mid b$. □

Remarque 6.26.
Le lemme de Gauss (ou théorème de Gauss en Terminale S) est une généralisation du lemme d'Euclide : « Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Si a divise le produit bc, et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c. »

Démonstration du lemme de Gauss. ◊ Comme a divise bc, il existe un entier k tel que $bc = ka$. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

En multipliant par c cette dernière égalité, on obtient :

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Comme $(cu + kv)$ est un entier, cette égalité prouve que a divise c. □

6.3 Congruences dans $\mathbb{Z}$

6.3.1 Définitions et propriétés

Définition 6.27. *Congruence*
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est *congru* à b *modulo* n si $n \mid a - b$. On note alors $a \equiv b \pmod{n}$.

Exemples 6.28.
1. $11 \equiv 1 \pmod 5$ car $5 \mid 11 - 1$.
2. $25 \equiv 4 \pmod 7$ car $7 \mid 25 - 4$.

Définition 6.29.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est *congru* à b *modulo* p, si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p.

Nous avons donné deux définitions de congruence. On montre qu'elles sont équivalentes.

Démonstration. ◊

— Supposons que a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par p. On peut donc écrire

$$a = p \times k + r \quad \text{et} \quad b = p \times k' + r \quad \text{avec } k, k' \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant p.$$

donc

$$b - a = p \times k' + r - (p \times k) + r = p \times k' - p \times k = p(k' - k).$$

$k' - k$ étant un entier relatif, on en déduit que $b - a$ est multiple de p.

— Supposons que $b - a$ est multiple de p, on peut écrire $b - a = k \times p$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de b par p. On a donc $b = p \times q + r$. Alors, en remplaçant dans l'égalité $b - a = k \times p$, on obtient

$$p \times q + r = a = kp.$$

Donc

$$A = p \times q + r - kp = p(q - k) + r$$

$q - k$ est un entier relatif et r est un entier naturel tel que $0 \leqslant r < p$. On en déduit que r est le reste de la division euclidienne de a par p. Donc a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p.

□

Propriétés 6.30.
1. Si $a \equiv b \pmod p$ et $b \equiv c \pmod p$ alors $a \equiv c \pmod p$.
2. Si $a \equiv b \pmod p$ et si $a' \equiv b' \pmod p$ alors
   — $a + a' \equiv b + b' \pmod p$,
   — $aa' \equiv bb' \pmod p$,
   — $a^n \equiv b^n \pmod p$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Si $a \equiv b \pmod p$ alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,
   — $a + c \equiv b + c \pmod p$,
   — $a - c \equiv b - c \pmod p$,
   — $ac \equiv bc \pmod p$.

Démonstration des propriétés 6.30. ♢

1. Si $a \equiv b \pmod p$ et $b \equiv c \pmod p$ alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par p et b et c ont le même reste dans la division euclidienne par p donc a et c ont le même reste dans la division euclidienne par p et par conséquent $a \equiv c \pmod p$.
2. Si $a \equiv b \pmod p$ et si $a' \equiv b' \pmod p$ alors $b - a$ est un multiple de p et $b' - a'$ est un multiple de p. On en déduit, d'après les propriétés des multiples que $(b - a) + (b' - a')$ et $(b - a) - (b' - a')$ sont des multiples de p, c'est-à-dire $(b + b') - (a + a')$ et $(b - b') - (a - a')$ sont des multiples de p donc :
$$a + a' \equiv b + b' \pmod p \quad \text{et} \quad a - a' \equiv b - b' \pmod p.$$
D'autre part, puisque $b - a$ est un multiple de p, $a'(b - a)$ est un multiple p et puisque $b' - a'$ est un multiple de p, $b(b' - a')$ est un multiple de p et par conséquent $a'(b - a) + b(b' - a')$ est un multiple de p, c'est-à-dire $a'b - a'a + bb' - ba'$ est un multiple de p donc $bb' - aa'$ est un multiple de p donc
$$aa' \equiv bb' \pmod p.$$
Enfin considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « $a^n \equiv b^n \pmod p$. Pour $n = 1$, on a $a^1 = 1$et $b^1 = b$ et on sait que $a \equiv b \pmod p$ donc $P(1)$ est vraie. Supposons la proposition $P(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 1$ alors $a^n \equiv b^n \pmod p$ et comme on a aussi $a \equiv b \pmod p$, on peut en utilisant la propriété précédente justifier que $a^n \times a \equiv b^n \times b \pmod p$ soit $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod p$, c'est-à-dire la proposition $P(n + 1)$ est vraie. On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. Si $a \equiv b \pmod p$ alors $b - a$ est un multiple de p mais on peut écrire :
$$b - a = (b + c) - (a + c)$$
donc $(b + c) - (a + c)$ est un multiple de p, donc
$$a + c \equiv b + c \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}$$

De même, on peut écrire $b - a = (b - c) - (a - c)$ donc

$$a - c \equiv b - c \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}.$$

D'autre part, puisque $b - a$ est un multiple de p alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$, $c(b - a)$ est un multiple de p, c'est-à-dire $bc - ac$ est un multiple de p donc

$$ac \equiv bc \pmod p \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{Z}.$$

□

Exemples 6.31.

1. On démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11. On peut écrire $10 \equiv -1 \pmod{11}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ et ainsi, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

6.3.2 Compléments : l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 6.32.
La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence

Démonstration. ♢ Les propriétés de reflexivité, symétricité et transitivité sont démontrées dans la section précédente. □

Remarque 6.33.
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note $\overline{a}$ la classe d'équivalence de a pour cette relation, c'est-à-dire :

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod n\}.$$

Définition 6.34. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ par cette relation est l'ensemble quotient noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Conséquence 6.35.
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $r \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant r < n \\ \overline{a} = \overline{r} \end{cases}$$

Démonstration. ♢

Existence Soit $a \in \mathbb{Z}$, il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{cases} a = qn + r \\ 0 \leqslant r \leqslant n \end{cases}$$

Or, $a \equiv r \pmod n$ car $r = 0n + r$ et $0 \leqslant r < n$, donc $\overline{a} = \overline{r}$. En effet,

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod n\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv r \pmod n\} = \overline{r}.$$

Unicité Supposons qu'il existe un autre $r' \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant r' < n$ et $\overline{r'} = \overline{a}$ donc $|r - r'| < n$ et $\overline{r} = \overline{r'}$, c'est-à-dire $r \equiv r' \pmod n$ ou il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r - r' = nk$. D'où : $|r - r'| = n\,|k| < n$ donc $|k| < 1$ car $n > 0$, donc $k = 0$ c'est-à-dire $r = r'$.

□

Proposition 6.36.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$$

et $\operatorname{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.

Démonstration. ♢ D'après ce qui précède, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$. En effet, soit $a \in \mathbb{Z}$, $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant r < n$ et $\overline{r} = \overline{a}$, donc $\overline{a} = \overline{r} \in \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$ donc :

$$\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1} \mid \subset\} \, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$.

De plus, soit $a \in \{0, \dots, n-1\}$. Il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant r < n$ et $\overline{r} = \overline{a}$ et ce r est unique donc $a = r$.

Ainsi :

$$\begin{cases} a \equiv a \pmod n \\ a \not\equiv i \pmod n \end{cases} \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } i \neq a$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a \in \overline{a} \\ a \in \overline{i} \end{cases} \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } i \neq a$$

donc les éléments de $\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$ sont deux à deux distincts. □

Théorème 6.37.
On définit deux lois de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{cases} \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \\ \overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b} \end{cases}$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unifère.

Démonstration. ♢ La loi :

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & & (a \times b) & \longmapsto & \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \end{array}$$

est une loi de composition interne, car c'est une application $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (cela provient du fait que la relation de congruence est compatible avec l'addition). De plus, cette application est indépendante du représentant choisi.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unifère provient du fait que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unifère. □

Remarques 6.38.

1. $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\overline{0}\}$ n'est pas unitaire.
2. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre. $\overline{3}$ et $\overline{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ donc $\overline{3} \times \overline{2} = \overline{6} = \overline{0}$ mais $\overline{3} \neq \overline{0}$ et $\overline{2} \neq \overline{0}$.

Théorème 6.39.
Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\&textPGCD(m, n) = 1$ si et seulement si $\overline{m}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. ♢

(⇒) $\&textPGCD(m, n) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un + vm = 1$, donc :

$$\overline{u} \times \overline{n} + \overline{v} \times \overline{m} = \overline{1} \Leftrightarrow \overline{v} \times \overline{m} = 1$$

car $\overline{n} = \overline{0}$ donc $\overline{m}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(⇐) Soit $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que il existe $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\overline{a} \times \overline{m} = \overline{1}$ donc $\overline{am} = \overline{1}$ et ainsi $am \equiv 1 \pmod n$. Il existe docn $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \times m - kn = 1$, c'est-à-dire $\&textPGCD(n, m) = 1$.

□

Corollaire 6.40.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si n est premier.

Démonstration. ◊

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times) \text{ est un corps} &\Leftrightarrow \forall \overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \overline{m} \text{ est inversible et } \overline{m} \neq \overline{0} \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \ \&textPGCD(m,n) = 1 \text{ et } n \text{ ne divise pas } m \\ &\Leftrightarrow n \text{ est premier.}\end{aligned}$$

□

Remarque 6.41.
L'ensemble des éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$ est un groupe.

Théorème 6.42.
Soit $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. $\&textPGCD(m,n)=1$ si et seulement si $\overline{m}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.

Démonstration. ◊

($\Rightarrow$) $\overline{m}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ signifie que

$$G(\overline{m}) = \{k\overline{m} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} =$$

Il suffit de démontrer que $\overline{1} \in G(\overline{m})$ afin d'avoir $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) \subset G(\overline{m})$. En effet,si $\overline{1} \in G(\overline{m})$, alors soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$\overline{x} = \overline{1} \times \overline{x} \in G(\overline{m})$ car $\overline{1}G(\overline{m})$ et $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
Par hypothèse, $\&textPGCD(n,m)=1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $nu+mv=1$, donc $\overline{nu}+\overline{mv}=\overline{1}$. Or $\overline{n}=0$ donc $\overline{1}=\overline{vm}\in G(\overline{m})$ car $\overline{v}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$.
Montrons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+ \supset G(\overline{m})$. Soit $\overline{x}\in G(\overline{m})$. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\overline{x}=k\overline{m}$ donc

$$\overline{x} = \underbrace{\overline{m}+\cdots+\overline{m}}_{k \text{ fois}} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

car $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ est un groupe.

($\Leftarrow$) Comme $\overline{m}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, on a donc $G(\overline{m}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Or $\overline{1}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\overline{1}=k\overline{m}$ donc $km\equiv 1 \pmod n$ donc il existe $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $km-k'n=1$, c'est-à-dire $\&textPGCD(m,n)=1$.

□

Corollaire 6.43.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ est un groupe cyclique d'ordre n. Ce groupe est engendré par la classe de tout entier p premier avec n.

Démonstration. ◊ $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ est un groupe fini d'ordre n et monogène car $\overline{1}$ est générateur.
D'après ce qui précède, si $\&textPGCD(p,n)=1$ alors $\overline{p}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. □

6.4 Applications

6.4.1 Reste

On souhaite déterminer les restes successifs dans la division par 7 des nombres suivants :

$$50^{100},\ 100,\ 100^3,\ 50^{100}+100^{100}.$$

1. On détermine le reste de 50^{100} par la division par 7. On a $50 \equiv 1 \pmod 7$ car $50 = 7 \times 7 + 1$. D'après la compatibilité avec les puissances, on a :
$$50^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod 7.$$
Le reste est 1.
2. On détermine le reste de 100 par la division par 7. $100 = 50 \times 2$, comme $50 \equiv 1 \pmod 7$, d'après la compatibilité avec la multiplication, on a :
$$100 \equiv 2 \pmod 7.$$
Le reste est 2.
3. Pour déterminer le reste de 100^3 par la division par 7, on utilise la question précédente et la compatibilité avec les puissances. On a :
$$100^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7.$$
Le reste est 1.
4. On détermine le reste de $50^{100} + 100^{100}$ par la division par 7. On a : $100^{100} = 100^{3\times 33+1} = (100^3)^{33} \times 100$, donc d'après la compatibilité avec les puissances et la multiplication, on a :
$$100^{100} \equiv 1^{33} \times 2 \equiv 2 \pmod 7.$$
Par compatibilité avec l'addition, on a alors :
$$50^{100} + 100^{100} \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod 7.$$

6.4.2 Divisibilité

On va montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

On a : $3^{n+3} = 3^n \times 3^3 = 27 \times 3^n$, or $27 \equiv 5 \pmod{11}$, donc d'après la compatibilité avec la multiplication, on a :
$$3^{n+3} \equiv 5 \times 3^n \pmod{11}.$$
On a : $4^{4n+2} = (4^4)^n \times 4^2$, or $4^2 \equiv 5 \pmod{11}$ donc $4^4 \equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11}$, donc :
$$4^{4n+2} \equiv 3^n \times 5 \pmod{11}.$$
On en déduit donc :
$$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}.$$
La proposition est donc vérifiée, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.4.3 Petit théorème de Fermat

Théorème 6.44. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p. En d'autres termes $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Démonstration du théorème 6.44. ♢ p ne divise aucun nombre de la suite a, $2a$, ..., $(p-1)a$. En effet, d'après le théorème de Gauss, si p divisait un de ces produits ka, p diviserait k puisque a et p sont premiers entre eux. Ceci est impossible puisque $1 < k < p$.

De plus, les restes des divisions de a, $2a$, ..., $(p-1)a$ par p sont tous différents. Si on trouvait des restes identiques pour ka et $k'a$ $(k > k')$ alors le reste de $(k-k')a$ par p serait nul, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc, à l'ordre près des facteurs les restes de a, $2a$, ..., $(p-1)a$ par p sont $1, 2, \dots, p-1$.

Par conséquent la division du produit $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ par p a pour reste le produit $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ et donc $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ qui s'écrit encore

$$a^{p-1} \times 2 \times \cdots (p-1) \equiv 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) \pmod{p}.$$

Il existe donc un entier relatif k tel que

$$(a^{p-1} - 1)(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1)) = kp.$$

Comme p est premier avec $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$. a^{p-1} est donc congru à 1 modulo p. □

Corollaire 6.45.
Soit p un nombre premier et a un entier quelconque alors $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Démonstration du corollaire 6.45. ♢ D'après ce qui précède, si a et p sont premiers entre eux, $a^{p-1} - 1$ est congru à 0 modulo p. Sinon, p étant premier, a est congru à 0 modulo p. On a donc soit $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ soit $a^P \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$ et par conséquent dans les deux cas $a^p \equiv a \pmod{p}$. □

6.4.4 Le cryptage RSA

Le cryptage RSA (du nom des inventeurs, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman) est intéressant car la clé de cryptage est publique et il n'a donc pas de risques liés à l'envoi de la clé et au procédé de codage des données. Bob, comme tout le monde, peut crypter et envoyer un message. Par contre, seul la destinataire, Alice, qui connaît la clé privée correspondante pourra reconstituer le message initial.

Alice, la destinataire rend publique deux nombres n et c où n est le produit de deux grands nombres premiers p et q qu'elle est seule à connaître, où c est un entier premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ compris entre 2 et $(p-1)(q-1)$.

Pour coder le message « Bonjour », par exemple, on commence par remplacer les lettres par leurs positions dans l'ordre alphabétique, ce qui donne

$$02\ 15\ 14\ 10\ 15\ 21\ 18.$$

Si on utilise $n = 10573 = 97 \times 109$, on peut regrouper les chiffres par 4 sans risquer de dépasser n. Ce qui donne 0215 1410 1521 0018. Pour chaque nombre a de la série, on détermine alors b, reste de la division de a^c par n. On obtient alors dans ce cas avec $c = 5$ la série :

$$9131\ 7391\ 0690\ 7574.$$

C'est cette série de nombres qu'envoie Bob à Alice.

Alice qui connaît les deux facteurs premiers de n (ici $p = 97$ et $q = 109$) détermine alors facilement le nombre entier d vérifiant $1 < d < (p-1)(q-1)$ et tel que

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Ici $d = 6221$.

Alice peut alors retrouver la série initiale de nombres car, pour chaque entier b de cette série, on démontre de b^d est congru à a modulo n.

L'intérêt pour Alice est bien sûr d'avoir un nombre n produit de deux nombres premiers très grands de façon à ce que les calculateurs même les plus rapides ne puissent pas trouver en un temps suffisamment court les deux facteurs premiers nécessaires pour calculer d.

On note d'autre part que c et d jouent le même rôle et sont interchangeables. Ainsi Alice peut décider de coder elle-même un message en utiliser sa clé privée $d = 6621$. Bob décryptera alors aisément ce message avec la clé publique c. Le message envoyé à Bob constitue en fait une signature du message d'Alice. En effet, si Bob réussit à décrypter sans problème le message à l'aide de la clé c, c'est que ce message a été codé avec la clé privée d connue d'Alice seule et cela suffit pour en garantir l'authenticité.

On donne quelques propriétés permettant de justifier la robustesse de la méthode RSA.

Propriété 6.46.
Soient p et q deux nombres premiers. Si c, tel que $1 < c < (p-1)(q-1)$, est premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ alors il existe un unique d tel que $1 < d < (p-1)(q-1)$ et vérifiant

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1).}$$

Démonstration de la propriété 44.2. ♢ Si c et $(p-1)(q-1)$ sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $u_0c + v_0(p-1)(q-1) = 1$. Par suite (u, v) est solution de

$$uc + v(p-1)(q-1) = 1$$

si et seulement si il existe un entier relatif k tel que

$$u = u_0 - k(p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad v = v_0 + kc.$$

Soit donc k tel que u soit le plus petit des entiers positifs. Dans ces conditions

$$uc = 1 - v(p-1)(q-1) \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

et le nombre d recherché est par conséquent égal à u.

Il est unique car s'il en existait un autre, d', alors on aurait

$$c(d-d') \equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Comme c est premier avec $(p-1)(q-1)$, alors, d'après le théorème de Gauss,

$$d - d' \equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Mais comme on a $1 < d < (p-1)(q-1)$ et $1 < d' < (p-1)(q-1)$ et bien, on peut avoir que $d = d'$. □

Propriété 6.47.
Dans les conditions précédentes, si p et q sont différents et si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a \pmod{pq}$.

Démonstration de la propriété 44.3. ♢ Si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a^{cd} \pmod{pq}$ et $cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Il existe donc un entier $k \geqslant 0$ tel que $cd = 1 + k(p-1)(q-1)$. On obtient donc

$$a^{cd} = a\left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1}\right)^k.$$

Si a est divisible par p alors de façon évidente, $a^{cd} \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$, sinon, d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ d'où $a^{cd} \equiv a \pmod{p}$. De même $a^{cd} \equiv a \pmod{q}$. Il existe donc deux entiers k et k' tels que $a^{cd} = a + kp$ et $a^{cd} = a + k'q$. Ainsi $kp = k'q$, entier qui se trouve donc être multiple de pq puisque p et q sont des nombres premiers différents. On obtient donc dans ces conditions $a^{cd} \equiv a \pmod{pq}$. □

6.4.5 Le numéro INSEE

Le numéro INSEE ou numéro de Sécurité Sociale est formé de 15 chiffres déterminés, pour chaque individu de la façon suivante :

- 1 chiffre pour le sexe : Homme (1) et Femme (2)
- 2 chiffres correspondants aux deux derniers chiffres de l'année de naissance
- 2 chiffres correspondant au mois de naissance
- 2 chiffres correspondant au département de naissance
- 3 chiffres correspondant à la commune de naissance
- 3 chiffres correspondant au numéro d'inscription sur le registre des naissances
- 2 chiffres correspondant à une clé de contrôle. La clé de contrôle est ainsi déterminée de la manière suivante : « *On prend le nombre formé par les 13 premiers chiffres, on cherche son reste r dans la division par* 97*, la clé est alors égale au nombre* $97 - r$ *écrit avec deux chiffres (le premier étant éventuellement un* 0.

Exemple 6.48.

1. Vérifier la clé de contrôle associée au numéro 2 85 05 33 565 001 89
2. On change le dixième chiffre « 5 » par le chiffre « 9 ». Montrer qu'alors la clé de contrôle permet de détecter l'erreur.

6.4.6 Théorème chinois

Théorème 6.49.
Soit $(n, m) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $\&textPGCD(m, n) = 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Alors

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases} \tag{Σ}$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.

Si, de plus, $x_0 \in \mathbb{Z}$ est une solution particulière de Σ, alors l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ est $\{x_0 + knm \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. ♢ Soit $x \in (\Sigma)$. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod{n} \\ x_0 \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x_0 \equiv x \pmod{n} \\ x_0 \equiv x \pmod{m} \end{cases}$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nk = x_0 - x$ et $mk' = x_0 - x$. D'après le théorème de Gauss, $n \mid k'$ car $\&textPGCD(n, m) = 1$. Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = ln$, donc $x_0 - x = lmn$, c'est-à-dire

$$\mathscr{S} \subset \{x_0 + lmn \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit $x = x_0 + lmn$, où $l \in \mathbb{Z}$. On a $x \equiv x_0 \pmod{n}$ et $x \equiv x_0 \pmod{m}$. Ainsi on obtient l'égalité.

Montrons que $\mathscr{S} \neq \varnothing$.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} xm \equiv am \pmod{mn} \\ xn \equiv bn \pmod{nm} \end{cases}$$

donc $x(m - n) \equiv am - bn \pmod{nm}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a :

$$\overline{x} \times \overline{m - n} = \overline{am - bn}.$$

Si $\overline{m-n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors on a une solution :

$$\overline{x} = \overline{am-bn}\,\overline{m-n}^{-1}$$

puisqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x(m-n) = am - bn + lmn$ donc $m(x-a) = n(-b+km+x)$ donc n divise $x-a$ (car $\&textPGCD(n,m) = 1$ et $-b+km+x \in \mathbb{Z}$). De façon analogue, $x \equiv b \pmod{m}$.

Montrons que $\overline{m-n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\&textPGCD(m-n,mn) = 1$. Comme $\&textPGCD(m,n) = 1$, on a $\&textPGCD(m-n,n) = 1 = \&textPGCD(m-n,m)$, d'après le théorème de Bezout. En effet, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nu + mv = 1$ donc :

$$(m-n)v + (u+v)n = 1$$

donc $\&textPGCD(m-n,n) = 1$ car $u+v \in \mathbb{Z}$.

Par suite, $\&textPGCD(m-n,mn) = 1$ car si $d = \&textPGCD(m-n,mn)$. Soit d' tel que $d' \mid mn$ et $d' \mid m-n$, d est un diiviseur premier de d. Comme $\&textPGCD(m,n) = 1$, d' divise m ou n (par ex., $d' \mid n$. Or $d' \mid m-n$, donc $d' \mid m$. Ainsi $d' \mid \&textPGCD(m,n)$ et $d' = 1$ (ce qui est absurde. Comme d n'a pas de diviseur premier, $d = 1$. □

Exemple 6.50.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$

Solution. ◊

1. On multiple la première ligne par 6 et la deuxième par 5 :

$$\begin{cases} 6x \equiv 18 \pmod{30} \\ 5x \equiv 5 \pmod{30} \end{cases}$$

   donc $6x - 5x = x \equiv 13 \pmod{30}$.

   Réciproquement, si $x \equiv 13 \pmod{30}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 13 = 5 \times 6k$ donc $x \equiv 13 \pmod{5}$. Or $13 \equiv 3 \pmod{5}$, donc $x \equiv 3 \pmod{5}$. De plus,

$$x \equiv 13 \equiv 1 \pmod{6}.$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 13 \pmod{5}\}$.

2. On arriverait à $x \equiv 6 \pmod{24}$. Réciproquement, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 6 = 24k = 8 \times 3k$, donc $x \equiv 6 \pmod{8}$ mais $6 \not\equiv 2 \pmod{8}$ ou $x \equiv 6 \equiv 0 \pmod{6}$ mais $3 \not\equiv 0 \pmod{6}$. Il n'y a donc pas de solution.

□

6.4.7 Applications de la vie de tous les jours

Problème 6.51.
Un jardinier doit planter une haie autour d'une passerelle rectangulaire de longueur 10,2 m et de largeur 7,8 m. Il doit mettre un plant à chaque sommet d'un rectangle et espacer les plants régulièrement d'un nombre entier de centimètres.

Combien de plants au minimum peut-il planter ?

Solution du problème 6.51. ♢ On calcule $\&textPGCD(102, 78)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 102 &= 78 \times 1 + 24 \\ 78 &= 24 \times 3 + 6 \\ 24 &= 6 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

On a de plus :

$$102 = 6 \times 17 \quad \text{et} \quad 78 = 6 \times 13.$$

Les plants devront être plantés à 6 cm d'espacement chacun. Sur une longueur, on peut planter 17 plants et sur la largeur, 13 plants. Donc, on peut planter $(13 + 17) \times 2 = 60$ plants. □

Problème 6.52.
Une fleuriste dispose de 244 lys, 366 roses et 183 œillets roses. En utilisant le tout, quel nombre maximal de bouquets identiques peut-elle composer ?

Préciser la composition d'un bouquet.

Solution du problème 6.52. ♢ On a :

$$\&textPGCD(244, 366, 183) = \&textPGCD(\&textPGCD(244, 366), 183) = \&textPGCD(122, 183) = 61.$$

On peut donc composer au maximum 61 bouquets. La composition du bouquet est :

- 4 lys ;
- 6 roses ;
- 3 oeillets roses.

□

6.4.8 Équation de droite

L'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $ax + by = c$ forme une droite. Les couples d'entiers relatifs vérifiant cette équation correspond aux points M de la droite dont les coordonnées sont entières. La résolution de l'équation dans l'ensemble des entiers relatifs permet de donner les coordonnées de ces points. Selon la valeur de c, la droite D peut ne jamais passer par des points de coordonnées entières ou bien posséder une infinité de points de coordonnées régulièrement répartis.

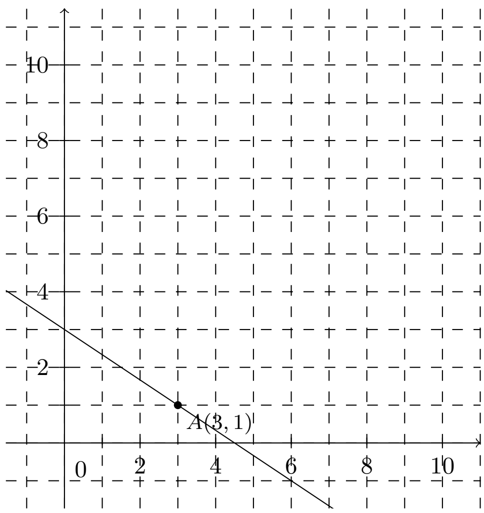


Figure 6.1 – Résolution graphique de l'équation $9x + 6y = 27$. Existence de solutions car la droite a un point à coordonnées entières.

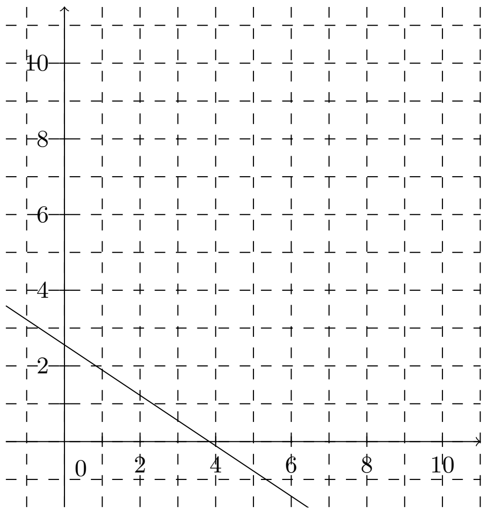


Figure 6.2 – Résolution graphique de l'équation $9x + 6y = 23$. Non-existence de solutions car la droite n'a aucun point à coordonnées entières.

LEÇON

7

PGCD ET PPCM DANS $\mathbb{Z}$.

Préambule

Niveau : collège et terminale « Mathématiques Expertes »

Prérequis : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, multiples, diviseurs, nombres premiers et décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.

Références :

[1] T. MOUADDEB, *PGCD, PPCM de deux nombres entiers. Nombres premiers entre eux, Bézout.* Leçon de Math, S2, Master 1 Ens. Math, 2010-2011.

[2] Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Algorithme d'Euclide*, Wikipédia.

7.1 PGCD (plus grand commun diviseur)

Définition 7.1. *Plus grand commun diviseur*

Soient a, b deux nombres entiers relatifs non nuls. L'ensemble des diviseurs communs de a et de b admet un plus grand élément que l'on appelle le *plus grand commun diviseur* de a et de b.

Remarques 7.2.

1. $b \mid a$ si et seulement si $\&textPGCD(a, b) = b$.
2. Soient a et b deux entiers relatifs :

$$\&textPGCD(a, b) = \&textPGCD(|a|, |b|).$$

Propriétés 7.3.

Étant donnés quatre nombres entiers a, b, c et d.

1. $\&textPGCD(a, b) = \&textPGCD(b, a)$;
2. $\&textPGCD(ka, kb) = k\&textPGCD(a, b)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Si $a \mid c$ et $b \mid d$ alors $\&textPGCD(a, b) \mid \&textPGCD(c, d)$.

Démonstration des propriétés 7.3. ◊

1. Triviale
2. Soit $k \neq 0$, on peut appliquer l'algorithme d'Euclide sur a et b :

$$\begin{cases} a = bq_0 + r_0 \\ b = r_0 q_1 + r_1 \\ r_0 = r_1 q_2 + r_2 \\ \quad \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Donc, d'après (7.1), $\&textPGCD(a, b) = r_n$. On multiplie les expressions de (7.1) par k :

$$\begin{cases} ka = kbq_0 + kr_0 \\ kb = kr_0 q_1 + kr_1 \\ kr_0 = kr_1 q_2 + kr_2 \\ \quad \vdots \\ kr_{n-2} = kr_{n-1} q_n + kr_n \\ kr_{n-1} = kr_n q_{n+1} + 0 \end{cases}$$

D'où $\&textPGCD(ka, kb) = kr_n$.

3. Comme $\&textPGCD(a, b) \mid a$, $a \mid c$ et $\&textPGCD(a, b) \mid b$ et $b \mid d$ alors $\&textPGCD(a, b)$ divise c et d donc divise $\&textPGCD(c, d)$.

□

Théorème 7.4. *Théorème d'Euclide*
Soient a et b deux entiers non nuls. La suite des diviseurs euclidiennes :

— de a par b : $a = bq_0 + r_0$;

— de b par r_0 (si $r_0 \neq 0$) : $b = q_1 r_0 + r_1$;

— ...

— de r_{n-1} par r_n (si $r_n \neq 0$) : $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$

fini par s'arrêter un des restes r_i étant nul. Le dernier reste non nul est alors le $\&textPGCD(a, b)$ (si $r_0 = 0$ alors $\&textPGCD(a, b) = b$).

Démonstration du théorème 7.4. ◊ Les inégalités $b > r_0 > r_1 > \cdots > r_n > \cdots \geqslant 0$ montrent que la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entiers naturels, cette suite est finie. D'autre part, considérons l'égalité $a = bq_0 + r_0$:

— tout diviseur de a et b divise $a - bq_0$, c'est un diviseur de b et r_0 ;

— tout diviseur de b et r_0 divise $bq_0 - r_0$, c'est un diviseur de b et r_0.

Ainsi, les diviseurs communs de a et b sont ceux de b et r_0 et il va de même pour le plus grand d'entre eux : $\&textPGCD(a, b) = \&textPGCD(b, r_0)$.

On peut appliquer ce raisonnement à chaque égalité :

$$\&textPGCD(a, b) = \&textPGCD(b, r_0) = \cdots = \&textPGCD(r_{i-1}, r_{i-2}).$$

Or si $r_{i-2} = r_{i-1} q_i + 0$ alors $\&textPGCD(a, b) = \&textPGCD(r_{i-1}, r_i) = r_{i-1}$ avec $r_i = 0$. □

On donne maintenant un algorithme qu'on peut écrire sur Xcas :

```
pgcdeuclide(a,b):={
   local r;
   tantque b<>0 faire
     r := irem(a,b)
     a := b
     b := r
  ftantque
   retourne(a)
}
```

Exemple 7.5.
Calculer $\&textPGCD(1636, 1128)$.

Exemple 7.5. ♢ On applique l'algorithme d'Euclide :

$$
\begin{aligned}
1636 &= 1128 + 508 \\
1128 &= 2 \times 508 + 112 \\
508 &= 4 \times 112 + 60 \\
112 &= 60 + 52 \\
60 &= 52 + 8 \\
52 &= 6 \times 8 + 4 \\
8 &= 4 \times 2 + 0.
\end{aligned}
$$

Donc : $\&textPGCD(1636, 1128) = 4$. □

7.2 PPCM

Définition 7.6.
Soient a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et b admet un plus petit élément appelé le *PPCM* de a et b, noté $\mathrm{PPCM}(a, b)$.

Remarques 7.7.
1. Les multiples communs à a et b sont les multiples du $\mathrm{PPCM}(a, b)$.
2. $a \mid n$ et $b \mid n$ si et seulement si $\mathrm{PPCM}(a, b) \mid n$.

Exemple 7.8.
$\mathrm{PPCM}(6, 15) = 30$.

Propriétés 7.9.
1. $\mathrm{PPCM}(a, b) = \mathrm{PPCM}(b, a)$.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{PPCM}(ka, kb) = k\mathrm{PPCM}(a, b)$.
3. Si $a \mid c$ et $b \mid d$ alors $\mathrm{PPCM}(a, b) \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$.

◊ *Démonstration de la proposition 7.9.*

1. Triviale par définition.
2. Soit $m = \mathrm{PPCM}(a, b)$. Il existe donc p et q entiers relatifs tels que $m = pa = qb$ donc $km = kap = kbp$ et donc km est un multiple commun à a et b. Ainsi $\mathrm{PPCM}(ka, kb) \leqslant k\mathrm{PPCM}(a, b)$. Soit $M = \mathrm{PPCM}(ka, kb)$. Il existe p' et q' entiers relatifs tels que $M = p'ka = q'kb$. donc a divise $\frac{M}{k}$ qui est entier car multiple commun de a et b, donc $\mathrm{PPCM}(a, b) \leqslant \frac{\mathrm{PPCM}(ka, kb)}{k}$. On en déduit que $\mathrm{PPCM}(ka, kb) = k\mathrm{PPCM}(a, b)$.
3. Comme $a \mid c$ alors $a \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$ et $b \mid d$ donc $b \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$. Ainsi, $\mathrm{PPCM}(a, b) \mid \mathrm{PPCM}(c, d)$.

□

7.3 PPCM et PGCD

7.3.1 Une proposition

Proposition 7.10.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On a :

$$\&textPGCD(a, b) \cdot \mathrm{PPCM}(a, b) = |ab|\,.$$

◊ *Démonstration de la proposition 7.10.* Soient $D = \&textPGCD(a, b)$ et $M = \mathrm{PPCM}(a, b)$. Il existe a' et b' tels que $a = Da'$ et $b = Db'$ avec $\&textPGCD(a', b') = 1$.

$$\begin{aligned} DM &= \&textPGCD(Da', Db') \times \mathrm{PPCM}(Da', Db') \\ &= D^2 \times \&textPGCD(a', b') \times \mathrm{PPCM}(a', b') \\ &= D^2 \times 1 \times \mathrm{PPCM}(a', b') \end{aligned}$$

On pose $m = \mathrm{PPCM}(a', b')$ et on a :

$$a'b' \geqslant m. \tag{7.2}$$

Comme $a' \mid m$, $b' \mid m$ et $\&textPGCD(a', b') = 1$, d'après Gauss, $a'b' \mid m$, d'où

$$a'b' \leqslant m. \tag{7.3}$$

De (7.2) et (7.3), on obtient $m = a'b'$ donc

$$Dm = D^2a'b' = Da'Db' = ab.$$

□

7.4 Applications

7.4.1 Nombres premiers entre eux

Définition 7.11.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, a et b sont *premiers entre eux* si et seulement si $\&textPGCD(a, b) = 1$.

Propriété 7.12.
Soient a et b deux entiers naturels non nuls. δ est le $\&textPGCD$ de a et de b si et seulement si, $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont des entiers premiers entre eux.

Démonstration de la propriété 7.12. ◊ On justifie que $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont des entiers naturels non nuls.

Comme $\delta = \&textPGCD(a,b)$, $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$ donc il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $k\delta = a$ et $k'\delta = b$, d'où $\delta = \frac{a}{k} = \frac{b}{k'}$.

$$\frac{a}{\delta} = \frac{a}{\frac{a}{k}} = a \times \frac{k}{a} = k \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{b}{\delta} = \frac{b}{\frac{b}{k'}} = b \times \frac{k'}{b} = k' \in \mathbb{Z}.$$

Si $d = \&textPGCD\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)$ alors, en utilisant la formule d'homogénéité, on obtient :

$$d = \&textPGCD\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}\&textPGCD(a,b).$$

Or $\delta = \&textPGCD(a,b)$ d'où $d = 1$.

Réciproquement, si $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux alors $\&textPGCD\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = 1$. En utilisant une nouvelle fois, la formule d'homogénéité :

$$\&textPGCD\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{1}{\&textPGCD(a,b)}\&textPGCD(a,b) = 1$$

et ainsi, $\delta = \&textPGCD(a,b)$. □

Exemple 7.13.
Factoriser $\frac{12345}{13991}$.

Exemple 7.13. ◊ On calcule $\&textPGCD(12345, 13991)$.

$$13991 = 12345 \times 1 + 1646$$
$$12345 = 1646 \times 7 + 823$$
$$1646 = 823 \times 2 + 0.$$

Donc : $\&textPGCD(12345, 13991) = 823$ et :

$$12345 = 15 \times 823$$
$$13991 = 17 \times 823$$

D'où :

$$\frac{12345}{13991} = \frac{15}{17}.$$

Comme $\&textPGCD(15, 17) = 1$, la fraction $\frac{15}{17}$ est irréductible. □

7.4.2 Égalité de Bézout

Théorème 7.14.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur $\&textPGCD$. Alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$. On appelle cette égalité, *égalité de Bézout*.

Démonstration du théorème 7.14. $\diamondsuit$

— Soit E l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$ où x et y sont des entiers relatifs.

E est une partie non vide de $\mathbb{N}$. En effet, on a, par exemple, $|a| \in E$ car, selon le signe de a, l'entier naturel $|a|$ s'écrit $a \times 1 + b \times 0$ ou $a \times (-1) + b \times 0$. E étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, E admet un plus petit élément n.

Par définition de E, il existe donc des entiers relatifs u et v tels que $n = au + bv$. Or d divise a et b donc d divise n, d'où $d \leqslant n$.

— On montre que n divise a en écrivant la division euclidienne de a par n : $a = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$ et $q \in \mathbb{Z}$. Donc :

$$r = a - nq = a - q(au + bv) = a(1 - qu) + b(-qv).$$

Ainsi r est de la forme $ax + by$ avec x et y des entiers relatifs. De plus, $r < n$ donc, par définition de n, $r \notin E$. Alors nécessairement $r = 0$ et donc n divise a.

— On montre de même que n divise b. D'où, par définition de d, $n \leqslant d$. Finalement, on obtient $d = n = au + bv$.

$\square$

Théorème 7.15. *Théorème de Bézout*
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration du théorème 7.15. Si a et b sont premiers entre eux alors $\&textPGCD(a,b) = 1$ et donc, avec la propriété précédente, $au + bv = 1$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Soit $D = \&textPGCD(a,b)$ alors D divise a, D divise b donc D divise $au + bv$, d'où $D = 1$. $\square$

Exemple 7.16.
Résoudre l'égalité de Bézout suivante :

$$266u + 224v = \&textPGCD(266, 224).$$

Exemple 7.16. $\diamondsuit$ On détermine tout d'abord $\&textPGCD(266, 244)$ avec l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 266 &= 1 \times 224 + 42 \\ 224 &= 5 \times 42 + 14 \\ 42 &= 3 \times 4 + 0. \end{aligned}$$

D'où $\&textPGCD(266, 224) = 14$. On résout donc l'équation :

$$266u + 224v = 14.$$

Par l'algorithme d'Euclide, on trouve :

$$\begin{aligned} 14 &= 224 - 5 \times 42 \\ 14 &= 224 - 5(266 - 244) \\ 14 &= 6 \times 224 - 5 \times 266. \end{aligned}$$

On obtient $u = -5$ et $v = 6$.

On peut montrer que toutes les solutions sont les couples :

$$\{(-5 + 224k, 6 - 266k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\square$

7.4.3 Un mot du théorème de Gauss

Théorème 7.17. *Théorème de Gauss*
Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si $a \mid bc$ et a et$b$ sont premiers entre eux alors $a \mid c$.

Démonstration du théorème 7.17. ♢ Comme $a \mid bc$, il existe un entier k tel que $bc = ka$. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et b tels que $au + bv = 1$.

En multipliant par c cette dernière égalité, on obtient :

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Comme $(cu + kv)$ est un entier, cette égalité prouve que $a \mid c$. □

Proposition 7.18.
Soient a, b et c trois entiers relatifs. Si $a \mid c$, $b \mid c$, a et b sont premiers entre eux alors $ab \mid c$.

Démonstration de la proposition 7.18. ♢ Comme $a \mid c$, il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ad$. Comme $b \mid c$, il existe $d' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = bd'$. Donc $ad = bd'$. Comme a divise bd' et $\&textPGCD(a, b) = 1$, d'après le théorème de Gauss, a divise d'. Il existe donc $d'' \in \mathbb{Z}$ tel que $d' = ad''$. Donc :

$$c = d'b = ad''b.$$

□

7.4.4 Décomposition en facteurs premiers et PGCD

Théorème 7.19. *Théorème fondamental de l'arithmétique*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

1. Il existe k nombres premiers naturels, $p_1, \dots, p_k$ distincts deux à deux et des nombres entiers non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que :
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$
2. Il y a unicité de cette décomposition à l'ordre des facteurs près.

Démonstration du théorème 7.19. ♢

Existence : La démonstration se fait par récurrence sur n.

Initialisation : Si $n = 2$ alors $n = 2^1$.

Hérédité : Si $n \geqslant 2$ alors n possède au moins un diviseur premier de p et l'on peut écrire $n = pm$ avec $m < n$. Si $m = 1$ alors c'est fini ! Sinon on applique l'hypothèse de récurrence à m pour obtenir la décomposition sur n.

Unicité : la démonstration de l'unicité se fait par récurrence sur n.

Initialisation : L'unicité est évidente pour $n = 2$. En effet, si $2 = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ montre que $q_i \mid 2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, ce qui impose d'avoir $m = 1$, $q_1 = 2$ et $\beta_1 = 1$.

Hérédité : Si l'unicité est démontrée jusqu'au rang n, on suppose que :

$$n + 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{N}^*$ et où les $p_1, \dots, p_k$ et $q_1, \dots, q_m$ sont des nombres entiers. $p_k \mid q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ donc p_k divise l'un des q_i, par exemple $p_k \mid q_m$. Comme p_k est premier, cela entraîne que $p_k = q_m$ et :

$$\frac{n+1}{p_k} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1} = q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m - 1}.$$

On applique l'hypothèse de récurrence à cette décomposition en distinguant deux cas :

1. Si $\alpha_k = 1$ alors $\beta_m = 1$ autrement q_m diviserait l'un des p_i avec $i \neq m$, ce qui est absurde.
2. Si $\alpha_k > 1$ alors $\beta_m > 1$ autrement p_k diviserait l'un des q_i avec $i \neq k$, ce qui est encore absurde.

$\square$

LEÇON

8

Congruences dans $\mathbb{Z}$.

Préambule

Niveau : terminale « Mathématiques Expertes »

Prérequis : multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

Références :

[1] X. Delahaye, *Congruences, Terminale S.* URL : [url].

[2] J.-P. Quelen, *Petit théorème de Fermat et codage RSA*, 15 janvier 2011.

[3] Manuel Sesamaths, Terminale S Spé, Editions Magnard, 2016. URL : [url]

[4] A. Bodin & al., *Algèbre, Cours de mathématiques de première année*, 2016. URL : [url]

[5] C. Boulonne, *Ateliers Mathématiques.* Notes de cours de première année de Licence, 2006-2007. URL : [url]

[6] C. Boulonne, *M101 : Fondements de l'algèbre.* Notes de Cours de première année de Licence, 2006-2007. URL : [url].

[7] C. Boulonne, *Promenades sur un cercle.* Exposé donné au collège Voltaire de Wattignies. 30 juin 2015. URL : [url]

[8] Contributeurs à Wikipedia, *Théorème des restes chinois.* (2020, février 4). Wikipédia, l'encyclopédie libre. Page consultée le 16 :51, février 4, 2020 à partir de [url]

[9] P. Jammes, *C5 : Relations.* Université d'Avignon, faculté de sciences. Licence M-I et C-SP, S1-algèbre. URL : [url]

8.1 Division euclidienne

Définition 8.1.
Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. On appelle *division euclidienne* de a par b, l'opération qui, au couple $(a; b)$, associe l'unique couple $(q; r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b.$$

a s'appelle le *dividende*, b le *diviseur*, q le *quotient* et r le *reste*.

Démonstration. $\lozenge$

Existence On peut supposer $a \geqslant 0$ pour simplifie. Soit $\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid bn \leqslant a\}$. C'est un ensemble non vide car $n = 0 \in \mathscr{N}$. De plus, pour $n \in \mathscr{N}$, on a $n \leqslant a$. Il y a donc un nombre fini d'éléments dans $\mathscr{N}$. On note $q = \max \mathscr{N}$ le plus grand élément de $\mathscr{N}$. Alors $qb \leqslant a$ car $q \in \mathscr{N}$, et $(q+1)b > a$ car $q+1 \notin \mathscr{N}$ donc :

$$qb \leqslant a < (q+1)b = qb + b.$$

On définit alors $r = a - qb$, r vérifie alors $0 \leqslant r = a - qb < b$.

Unicité Supposons que q', r' soient deux entiers qui vérifient les conditions du théorème. Tout d'abord, $a = bq + r = bq' + r'$ et donc $b(q - q') = r' - r$. D'autre part $0 \leqslant r' < b$ et $0 \leqslant r < b$ donc $-b < r' - r < b$. Mais $r' - r = b(q - q')$ donc on obtient $-b < b(q - q') < b<$; on peut diviser par $b > 0$ pour avoir $-1 < q - q' < 1$. Comme $q' - q$ est un entier, la seule possibilité est $q - q' = 0$ et donc $q = q'$. En repartant de $r' - r = b(q - q')$, on obtient maintenant $r = r'$. $\square$

Exemples 8.2.
$\lozenge$

1. La division euclidienne de 114 par 8 correspond à :

$$114 = 8 \times 14 + 2.$$

2. Pour avoir un reste positif dans la division euclidienne de -114 par 8, on écrit : $-2 = 6 - 8$. On obtient alors :

$$-114 = 8 \times (-14) - 2 = 8 \times (-14) - 8 + 6 = 8 \times (-15) + 6.$$

   Ainsi $q = -15$ et $r = 6$.

Remarques 8.3.

— Le reste est toujours un entier naturel inférieur au diviseur. Par conséquent, dans la division par 7, par exemple, il existe 7 restes possibles : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

— On peut schématiser la division euclidienne comme on pose une division :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

► Exercice 8.4.
Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer le diviseur b.

Solution. $\lozenge$ On écrit chacune des deux divisions euclidiennes, en notant q et q' les quotients respectifs :

$$\begin{cases} a = bq + 8 \text{ avec } b > 8 \\ 2a = bq' + 5 \text{ avec } b > 5 \end{cases}$$

En multipliant la première division par 2 et en égalisant avec la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} 2bq + 16 &= bq' + 5 \text{ avec } b > 8 \\ b(2q - q') &= -11 \\ b(q' - 2q) &= 11 \end{aligned}$$

b est donc un multiple positif non nul de 11, supérieur à 8, donc $b = 11$. $\square$

8.2 Congruences

8.2.1 Premiers résultats

Définition 8.5. *Congruence*

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n si $n \mid a - b$. On note alors $a \equiv b \pmod{n}$.

Exemples 8.6.

1. $11 \equiv 1 \pmod{5}$ car $5 \mid 11 - 1$.
2. $25 \equiv 4 \pmod{7}$ car $7 \mid 25 - 4$.

Définition 8.7.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo p, si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par b.

Exemple 8.8.

$$2008 \equiv 8 \pmod{10} \text{ car } 2008 = 10 \times 200 + 8.$$

Démonstration de l'équivalence de deux définitions. — Supposons que a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par n. On peut donc écrire :

$$a = p \times k + r \quad \text{et} \quad b = p \times k' + r \quad \text{avec } k,\ k' \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant p$$

donc

$$b - a = p \times k' + r - (p \times k + r) = p \times k' - p \times k = p(k' - k).$$

$k' - k$ étant un entier relatif, on en déduit que $b - a$ est multiple de p.

— Supposons que $b - a$ est multiple de p, on peut écrire $b - a = k \times p$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

□

Propriétés 8.9.

— $a \equiv 0 \pmod{n}$ si et seulement si a est un multiple de n ou n est un diviseur de a.

— La congruence est une relation d'équivalence, c'est-à-dire, pour tous entiers a, b et c, on a :

1. $a \equiv a \pmod{n}$ (réflexivité)
2. Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $b \equiv a \pmod{n}$ (symétrie)
3. Si $a \equiv b \pmod{n}$ et si $b \equiv c \pmod{n}$, alors $a \equiv c \pmod{n}$ (transitivité).

Démonstration. ♢ On utilise la définition 8.5 pour démontrer que la relation « Congru modulo n » est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

— On a bien $n \mid 0$ (pour $n \neq 0$) car 0 est divisible par n'importe quel nombre non nul (prendre $k = 0$ dans la définition de divisibilité).

— Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $n \mid a - b$, il existe donc un entier relatif k tel que $(b - a) = nk$ ou encore $-(b - a) = -nk$ soit donc $-(b - a) = n \times -k$. Comme $-k \in \mathbb{Z}$, on peut en déduire que n divise $-(b - a)$, c'est-à-dire n divise $a - b$ ou encore $b \equiv a \pmod{n}$.

— Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors il existe un entier relatif k tel que $(b - a) = nk$ (1). On sait de plus que $b \equiv c \pmod{n}$ donc il existe un entier relatif k' tel que $(c - b) = nk'$. (2) En additionnant les égalités (1) et (2), on trouve :

$$(b - a) + (c - b) = nk + nk' \Leftrightarrow -a + c = n(k + k') \Leftrightarrow c - a = n(k + k').$$

Comme k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$, la somme $k + k'$ est un nombre entier relatif. On a donc : $n \mid c - a$ d'où $a \equiv c \pmod{n}$.

□

Remarque 8.10.
La démonstration est encore plus triviale en prenant la définition 8.7.

Théorème 8.11.
Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$), a et b deux entiers relatifs.

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{n}.$$

Démonstration. ♢

($\Rightarrow$) On sait que $a \equiv b \pmod n$. Il existe donc des entiers q, q' et r tels que :

$$a = nq + r \quad \text{et} \quad b = nq' + r \text{ avec } 0 \leqslant r < n.$$

On obtient : $a - b = n(q - q')$. $a - b$ est alors un multiple de n, et son reste dans la division par n est nul, d'où $a - b \equiv 0 \pmod n$.

($\Leftarrow$) On sait que $a - b \equiv 0 \pmod n$. Il existe k tel que : $a - b = kn$ (1). Si l'on effectue la division de a par n, on a : $a = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$ (2). De (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} nq + r - b &= kn \\ -b &= kn - nq - r \\ b &= (q - k)n + r \end{aligned}$$

a et b ont le même reste dans la division par n, donc $a \equiv b \pmod n$.

□

8.2.2 Compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication

Théorème 8.12.
Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$) et a, b, c et d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \pmod n \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod n.$$

La relation de congruence est compatible avec :

1. l'addition : $a + c \equiv b + d \pmod n$
2. la multiplication : $ac \equiv bd \pmod n$
3. les puissances : pour tout entier naturel k, $a^k \equiv b^k \pmod n$.

Démonstration. ♢

1. **Compatibilité avec l'addition.** On sait que : $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, donc $(a - b)$ et $(c - d)$ sont des multiples de n. Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que : $a - b = kn$ et $c - d = k'n$.
   En additionnant ces deux égalités, on obtient :
   $$a - b + c - d = kn + k'n \Leftrightarrow (a + c) - (b + d) = (k + k')n.$$
   Donc $(a + c) - (b - d)$ est un multiple de n, d'où $a + c \equiv b + d \pmod n$.
2. **Compatibilité avec la multiplication.** On sait que : $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, donc, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $a = b + kn$ et $c = d + k'n$.
   En multipliant ces deux égalités, on obtient :
   $$\begin{aligned} ac &= (b + kn)(d + k'n) \\ ac &= bd + k'bn + kdn + kk'n^2 \\ ac &= bd + (k'b + kd + kk'n)n \\ ac - bd &= (k'b + kd + kk'n)n \end{aligned}$$
   Donc $(ac - bd)$ est un multiple de n, d'où $ac \equiv bd \pmod n$.

3. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « $a^n \equiv b^n \pmod p$ ». Pour $n = 1$, on $a^1 = 1$ et $b^1 = b$ et on sait que $a \equiv b \pmod p$ donc $P(1)$ est vraie. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 1$ alors $a^n \equiv b^n \pmod p$ et comme on a aussi $a \equiv b \pmod p$, on peut en utilisant la propriété précédente justifier que $a^n \times a \equiv b^n \times b \pmod p$, soit $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod p$, c'est-à-dire la proposition $P(n+1)$ est vraie. On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

□

► **Exercice 8.13.**
On veut déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 du nombre $50^{100} + 100^{100}$.

Solution. ♢ On a tout d'abord $50 \equiv 1 \pmod 7$ car $50 = 7 \times 7 + 1$. D'après la compatibilité avec les puissances, on a : $50^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod 7$.

De plus, $100 = 50 \times 2$ donc $100 \equiv 2 \pmod 7$ puis, par compatibilité avec les puissances, on a : $100^{100} \equiv 2^{100} \pmod 7$.

En calculant les restes modulo 7 des premières puissances de 2 :

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1 \pmod 7 \\ 2^1 &\equiv 2 \pmod 7 \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod 7 \\ 2^3 &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

on remarque que : $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$, $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$ et $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$ (on pourrait le démontrer en faisant une récurrence). Ainsi, pour calculer le reste modulo 7 de 2^{100}, il nous suffit de regarder le reste modulo 3 de 100.

$$100 = 3 \times 33 + 1 \Leftrightarrow 100 \equiv 1 \pmod 3.$$

Ainsi, $2^{100} = 2^{3\times 33+1} \equiv 2 \pmod 7$.

En combinant les résultats obtenus, on peut conclure, avec la compatibilité avec l'addition, que : $50^{100} + 100^{100} \equiv 3 \pmod 7$. □

► **Exercice 8.14.**

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier relatif n, le reste de la division de n^2 par 7.
2. En déduire alors les solutions de l'équation $x^2 \equiv 2 \pmod 7$.

Solution. ♢

1. Si on veut trouver la solution par une méthode exhaustive, on peut construire un tableau de congruence :

Reste de la $\div$ de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la $\div$ de n^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1

   Les restes possibles de n^2 par 7 sont donc 0, 1, 2 et 4.

2. Pour résoudre $x^2 \equiv 2 \pmod 7$, on recherche dans le tableau les valeurs de n pour lesquelles on obtient un reste de 2 quand n est au carré. Il est obtenu pour les restes 3 et 4 dans la division de n par 7.

   Les solutions de l'équation sont donc : $x \equiv 3 \pmod 7$ et $x \equiv 4 \pmod 7$.

□

8.3 Applications

8.3.1 Petit théorème de Fermat

Théorème 8.15. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p. En d'autres termes, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Démonstration. ◊ p ne divise aucun nombre de la suite a, $2a$, ..., $(p-1)a$. En effet, d'après le théorème de Gauss, si p divisait un de ces produits ka, p diviserait k puisque a et p sont premiers entre eux. Ceci est impossible puisque $1 < k < p$.

De plus, les restes des divisions a, $2a$, ..., $(p-1)a$ par p sont tous différents. Si on trouvait des restes identiques pour ka et $k'a$ ($k > k'$) alors le reste $(k-k')a$ par p serait nul, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc, à l'ordre près des facteurs les restes de a, $2a$, ..., $(p-1)a$ par p sont 1, 2, ..., $p-1$.

Par conséquent, la division du produit $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ par p a pour reste le produit $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ et donc $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ qui s'écrit encore :

$$a^{p-1} \times 2 \times \cdots \times (p-1) \equiv 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1) \pmod{p}.$$

Il existe donc un entier relatif k tel que :

$$(a^{p-1} - 1)(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p-1)) = kp.$$

Comme p est premier avec $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$. Ainsi, a^{p-1} est congru à 1 modulo p. □

Corollaire 8.16.
Soit p un nombre premier et a un entier quelconque alors $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Démonstration. ◊ D'après ce qui précède, si a et p sont premiers entre eux, $a^{p-1} - 1$ est congru à 0 modulo p. Sinon, p étant premier, a est congru à 0 modulo p. On a donc soit $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, soit $a^p \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$ et par conséquent, dans les deux cas, $a^p \equiv a \pmod{p}$. □

Exemple 8.17.
7 est un nombre premier et 7 ne divise par $10^{10^{10}}$ puisque $10^{10^{10}}$ s'écrit sous la forme $2^\alpha \times 5^\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$. Don d'après le corollaire du petit théorème de Fermat :

$$(10^{10^{10}})^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

8.3.2 Construction de nouveaux ensembles : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On rappelle que la relation $a \equiv b \pmod{n}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Définition 8.18. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie par :

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

La classe de a associée à $\mathscr{R}$ est :

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \equiv x \pmod{n}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid n \mid a - x\}.$$

On note donc :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathscr{R} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit des opérations sur l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Tout d'abord, l'addition :

Définition 8.19. *Addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
L'opération $\oplus$ correspond à l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{cccc} \oplus & : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & & (\overline{a}, \overline{b}) & \longmapsto & \overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b} \end{array}.$$

Remarque 8.20.
Cette opération est bien définie, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du choix d'un représentant :

$$\begin{aligned} \overline{a} = \overline{a'} \quad \text{et} \quad \overline{b} = \overline{b'} &\Rightarrow a \equiv a' \pmod n \quad \text{et} \quad b \equiv b' \pmod n \\ &\Rightarrow a + b \equiv a' + b' \pmod n \Rightarrow \overline{a+b} = \overline{a'+b'}. \end{aligned}$$

Exemple 8.21.
On se place dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

1. $\overline{3} \otimes \overline{2} = \overline{3+2} = \overline{5} = \overline{1}$.
2. $\overline{7} \otimes \overline{3} = \overline{7+3} = \overline{10} = \overline{2}$.

Proposition 8.22.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ est un groupe abélien avec $e = \overline{0}$ (élément neutre) et $\overline{a}^{-1} = -\overline{a}$ (élément inversible).

Démonstration. $\Diamond$ En exercice. $\square$

On définit ensuite la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 8.23. *Multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
On définit une multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{cccc} \otimes & : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & & (\overline{a}, \overline{b}) & \longmapsto & \overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a \cdot b} \end{array}.$$

Remarque 8.24.
Cette opération est bien définie car si $\overline{a} = \overline{a'}$ et $\overline{b} = \overline{b'}$ alors :

$$a \equiv a' \pmod n \quad \text{et} \quad b \equiv b' \pmod n \Rightarrow ab \equiv a'b' \pmod n \Rightarrow \overline{ab} = \overline{a'b'}.$$

Mais $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \otimes)$ n'est pas un groupe car il existe des éléments non inversibles. Par exemple, on se place dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et on regarde la classe $\overline{2} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \overline{2} \otimes \overline{0} &= \overline{2 \times 0} = \overline{0} \\ \overline{2} \otimes \overline{1} &= \overline{2 \times 1} = \overline{2} \\ \overline{2} \otimes \overline{2} &= \overline{2 \times 2} = \overline{0} \\ \overline{2} \otimes \overline{3} &= \overline{2 \times 3} = \overline{2} \end{aligned}$$

La classe de $2 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est donc pas inversible.

Pour cela, on va réduire l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en son ensemble des éléments inversibles pour l'opération $\otimes$.

Définition 8.25. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
On définit l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, l'ensemble de toutes les classes $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ inversibles par la multiplication $\otimes$.

Exemple 8.26.
On se place dans l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. On veut déterminer $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\times}$. On a vu que $\overline{2}$ n'est pas inversible pour $\otimes$, et évidemment, $\overline{0}$ n'est pas inversible pour $\otimes$. On cherche donc les inverses des éléments $\overline{1}$ et $\overline{3}$, on a :

$$\overline{1}^{-1} = \overline{1},\ \overline{3}^{-1} = \overline{3}.$$

D'où :

$$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\times} = \{\overline{1}, \overline{3}\}$$

et c'est un groupe pour la multiplication.

Proposition 8.27.
$\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible pour la multiplication si et seulement si $\&textPGCD(a, n) = 1$.

Démonstration. $\Diamond$

($\Rightarrow$) On suppose $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ inversible donc il existe $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{1}$. On traduit cela en terme de la relation « congru modulo » :

$$ab \equiv 1 \pmod{n},$$

il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ab - nk = 1$, d'où $\&textPGCD(a, n) = 1$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\&textPGCD(a, b) = 1$, il existe donc $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$, c'est-à-dire :

$$\overline{au + nv} = \overline{1}.$$

Or $\overline{nv} = \overline{0}$, ainsi :

$$\overline{au} = \overline{1}.$$

Donc $\overline{u}$ est inversible d'inverse $\overline{u}$.

$\square$

Définition 8.28. *Fonction indicatrice d'Euler*
L'indicatrice d'Euler $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est une fonction telle que :

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \&textPGCD(k, n) = 1\}, \quad \text{pour } n > 1.$$

C'est-à-dire $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers positifs et premiers à n.

Corollaire 8.29.
L'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ est l'ensemble des classes $\overline{a}$ tels que $\&textPGCD(a, b) = 1$. Donc, d'après la définition 8.28, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ a pour cardinal $\varphi(n)$.

Proposition 8.30.
Si p est un nombre premier alors $\varphi(p) = p - 1$.

Exemple 8.31.
Pour $n = 5$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. On a : $\varphi(5) = 4$ et pour $1 \leqslant k \leqslant 5$, on obtient $\&textPGCD(k, 5) = 1$ si $k \neq 5$.

Pour $n = 9$, on obtient :

$$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^{\times} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}.$$

D'où $\varphi(9) = 6$.

8.3.3 Cryptographie

Le code César

Avant de décrire le procédé du « Code César », on fait un petit rappel historique.

Jules César (en latin, *Caius Iulius Caesar IV*) était un général romain, né à Rome en 100 av. J.-C. et mort à Rome en 44 av. J.-C. Il fut ambitieux et brillant, repoussa les frontières romaines jusqu'au Rhin et à l'océan Atlantique en conquérant la Gaule.

Pour crypter les messages qu'ils envoient à ces centurions, Jules César appliqua une méthode de chiffrement très simple que l'on va décrire maintenant.

Le chiffre de César consiste à décaler les lettres de quelques rangs vers la droite ou vers la gauche de l'alphabet. Par exemple, historiquement, Jules César les lettres de 3 rangs vers la droite.

Remarque 8.32.
On se contentera dans cette partie, d'un cryptage avec un décalage de lettres de 3 à droite.

On peut dresser le tableau de cryptage suivant :

message clair	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
numéro clair NCl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
décalage	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3
numéro crypté NCr	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
message crypté	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

message clair	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
numéro clair NCl	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24*	25*	26*
décalage	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3
numéro crypté NCr	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	1	2	3
message crypté	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Remarque 8.33.
Pour calculer le numéro crypté NCr des nombres NCl avec un astérisque, on doit calculer le reste de la division suivante $(NCl + 3) \div 26$ (ou prendre le reste de $NCl + 3$ congru modulo 26).

Cryptage d'un message. On veut crypter le message « ZEN » avec le « Code César ». On part d'un message clair à un message crypté : le décalage de lettres est donc de +3.

— $Z \to 26 \overset{+3}{\to} 29 \overset{29>26}{\to} 3 \to C$

— $E \to 5 \overset{+3}{\to} 8 \to H$

— $N \to 19 \overset{+3}{\to} 22 \to Q$.

Le message crypté est donc « CHQ ».

Décryptage d'un message. Avant de décrypter un message crypté, on doit remarquer quelque chose.

Remarque 8.34.
Pour décrypter un message codé par le « Code César », on décale toutes les lettres du message crypté de trois rangs vers la gauche de -3.

On veut décrypter le message « FHVDU » par le « Code César » :

— $F \to 6 \overset{-3}{\to} 3 \to C$

— $H \to 8 \overset{-3}{\to} 5 \to E$

— $V \to 22 \overset{-3}{\to} 19 \to S$

— $D \to 4 \overset{-3}{\to} 1 \to A$

— $U \to 21 \overset{-3}{\to} 18 \to R$

Le message clair est donc « CESAR »

Remarque 8.35.
Si on veut décrypter le message « CRR » crypté avec le « Code César », on fait comme ceci :

— $C \to 3 \overset{-3}{\to} 0 \overset{0<1}{\to} 26 \to Z$

— $R \to 17 \overset{-3}{\to} 14 \to O$

— $R \to 17 \overset{-3}{\to} 14 \to O$

Le message clair est donc « ZOO ».

▶ **Exercice 8.36.**

1. Décrypter le message « ERQMRXU ! » crypté avec le « Code César ».
2. Crypter un message court avec le « Code César »

Le cryptage RSA

Le cryptage RSA (du nom des inventeurs, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman) est intéressant car la clé de cryptage est publique et il n'a donc pas de risques liés à l'envoi de la clé et au procédé de codage des données. Bon, comme tout le monde, peut crypter et envoyer un message. Par contre, seul la destinataire, Alice, qui connaît la clé privée correspondante pourra reconstituer le message initial.

Alice, la destinataire rend publique deux nombres n et c où n est le produit de deux grands nombres premiers p et q qu'elle est seule à connaître, où c est un entier premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ compris entre 2 et $(p-1)(q-1)$.

Pour coder le message « Bonjour », par exemple, on commence par remplacer les lettres par leurs positions dans l'ordre alphabétique, ce qui donne :

$$02\ 15\ 14\ 10\ 15\ 21\ 18.$$

Si on utilise $n = 10573 = 97 \times 109$, on peut regrouper les chiffres par 4 sans risquer de dépasser n. Ce qui donne 0215 1410 1521 0018. Pour chaque nombre a de la série, on déterminer alors b, reste de la division de a^c par n. On obtient alors dans ce cas avec $c = 5$ la série :

$$9131\ 7391\ 0690\ 7574.$$

C'est cette série de nombres qu'envoie Bob à Alice.

Alice qui connaît les deux facteurs premiers de n (ici $p = 97$ et $q = 109$) déterminer alors le nombre entier d vérifiant $1 < d < (p-1)(q-1)$ et tel que :

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Ici, $d = 6221$.

Alice peut alors retrouver la série initiale de nombres car, pour chaque entier b de cette série, on démontre que b^d est congrue à a modulo n.

L'intérêt pour Alice est bien sûr d'avoir un nombre n produit de deux nombres premiers très grands de façon à ce que les calculateurs même les plus rapides ne puissent pas trouver en un temps suffisamment court les deux facteurs premiers nécessaires pour calculer d.

On note, d'autre part, que c et d jouent le même rôle et sont interchangeables. Ainsi Alice peut décider de coder elle-même un message en utilisant sa clé privée $d = 6621$. Bob décryptera alors aisément ce message avec la clé publique c. Le message envoyé à Bob constitue en fait une signature du message d'Alice. En effet, si Bob réussit à décrypter sans problème le message à l'aide de la clé c, c'est que ce message a été codé avec la clé privée d connue d'Alice seule et cela suffit pour en garantir l'authenticité.

On donne quelques propriétés permettant de justifier la robustesse de la méthode RSA.

Propriété 8.37.
Soient p et q deux nombres premiers. Si c, tel que $1 < c < (p-1)(q-1)$, est premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ alors il existe un unique d tel que $1 < d < (p-1)(q-1)$ et vérifiant

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Propriété 8.38.
Dans les conditions précédentes, si p et q sont différents et si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a \pmod{pq}$.

Le numéro INSEE

Le numéro INSEE ou numéro de Sécurité Sociale est formé de 15 chiffres déterminés pour chaque individu de la façon suivante :

— 1 chiffre pour le sexe : Homme (1) et Femme (2) ;

— 2 chiffres correspondant aux deux derniers chiffres de l'année de naissance ;

— 2 chiffres correspondant au mois de naissance ;

— 2 chiffres correspondant au département de naissance ;

— 3 chiffres correspondant à la commune de naissance ;

— 3 chiffres correspondant au numéro d'inscription sur le registre des naissances ;

— 2 chiffres correspondant à une clé de contrôle. La clé de contrôle est ainsi déterminée de la manière suivante : « *On prend le nombre formé par les 13 premiers chiffres, on cherche son reste r dans la division par 97, la clé est alors égale au nombre $97 - r$ écrit avec deux chiffres (le premier étant éventuellement un 0).* »

► **Exercice 8.39.**

1. Vérifier la clé de contrôle associée au numéro 2 85 05 33 565 001 89.
2. On change le dixième chiffre « 5 » par le chiffre « 9 ». Montrer qu'alors la clé de contrôle permet de détecter l'erreur.

Solution. ♢

1. On fait la division euclidienne de 2 850 533 565 001 par 97. On trouve un reste de 8. Ainsi, $97 - 8 = 89$, ce qui est bien notre clé de contrôle.
2. Si on change le dixième chiffre « 5 » par le chiffre « 9 », on obtient le nombre 2 850 533 569 001. On effectue la division euclidienne de ce nombre par 97 et on trouve un reste de 31. Ainsi, on peut constater que la clé de contrôle change car $97 - 31 = 66 \neq 89$.

□

8.3.4 D'autres problèmes pour introduire la notion de congruences à des collégiens

Promenade sur un cercle

Deux promeneurs, Matt et Matic se promènent sur un cercle. Le cercle parcouru est jalonné de 3 plots : le plot $\overline{0}$, le plot $\overline{1}$ et le plot $\overline{2}$.

Matt et Matic se promène sur le cercle, ils démarrent du plot $\overline{0}$ pour aller au plot $\overline{1}$...puis continuent leur chemin du plot $\overline{1}$ pour aller au plot $\overline{2}$ puis du plot $\overline{2}$ pour arriver au point de départ, le plot $\overline{0}$.

1. Matt et Matic se promènent sur le cercle. Ils affirment qu'après 23 tours de cercle, ils se retrouvent sur le plot $\overline{1}$. Combien de plots ont-ils rencontrés durant leur parcours ?
2. Matt et Matic se promènent de nouveau sur le cercle. Ils affirment qu'ils ont rencontré 125 plots durant leur trajet. Combien ont-ils fait de tours de cercle ? À quel plot ont-ils terminé leur trajet ?

Solutions. ♢

1. Le nombre de plots rencontrés durant leur parcours est :

$$23 \times 3 + 1 = 69 + 1 = 70.$$

2. On fait la division euclidienne de 125 par 3. On trouve un quotient de 41 et un reste 2. Ainsi, Matt et Matic ont fait 41 tours de cercle et s'arrêtent au plot $\overline{2}$.

□

▶ **Exercice 8.40.**
Sur un cercle de 7 plots :

1. Matt et Matic ont fait 12 tours et sont arrivés sur le plot $\overline{5}$. Combien de plots ont-ils rencontrés sur leur route ?
2. Ils ont rencontré sur leur trajet, 801 plots. Combien ont-ils fait de tours de cercle ? À quel plot ont-ils terminé leur trajet ?
3. Reprendre les questions 1 et 2 avec un cercle de 13 plots.

Partage de bonbons

Lola veut partager le plus équitablement possible ses 84 bonbons avec ses 5 amis. Elle mangera ainsi les bonbons qui lui reste.

1. Combien de bonbons recevront chacun des amis de Lola ?
2. Combien de bonbons mangera-t-elle au final ?

♢

On peut voir une similitude avec le problème de la « Promenade sur un cercle ».

Promenade circulaire	Partage de bonbons
Nombre de plots par tour	Nombre d'amis
Nombre de plots rencontrés	Nombre total de bonbons
Nombre de tours de cercle	Nombre de bonbons donnés à chacun
Numéro du plot final	Nombre de bonbons mangés par Lola

Le problème peut être reformulé en terme de promenade circulaire : « Sur un cercle de 5 plots, Matt et Matic ont rencontré sur leur trajet, 84 plots. Combien ont-ils fait de tours de cercle ? À quel plot ont-ils terminé leur trajet ? »

Solution. On fait la division euclidienne de 84 par 5. On trouve un quotient de 16 et un reste de 4.
Lola devra donner à chacun de ses amis, 16 bonbons. Elle mangera les 4 restants. □

Remarque 8.41.
On peut donner une variante plus difficile à ce problème : « Martin a un certain nombre de bonbons qu'il veut partager équitablement avec ses 10 amis. Après le partage, il mange les bonbons qu'il n'a pas pu partagé.

Quel est le nombre de bonbons que Martin doit posséder pour que le partage soit totalement équitable (c'est-à-dire qu'après partage, Martin doit manger autant de bonbons que chacun de ses amis) ? »

Un Immeuble, des Étages, des Appartements (IEA)

Dans un immeuble, il y a huit étages. Les numéros des appartements sont agencés comme suivant :

— l'appartement n° 1 se trouve à l'étage 1 ;

— l'appartement n° 2 se trouve à l'étage 2 ;

— ...

— l'appartement n° 8 se trouve à l'étage 8 ;

— l'appartement n° 9 se trouve à l'étage 1 ;

— l'appartement n° 10 se trouve à l'étage 2...

À quel étage se trouve l'appartement n° 31 ?

$\Diamond$

Là encore, on peut trouver des similitudes avec le problème de la « Promenade sur le cercle » :

Promenade circulaire	IEA
Nombre de plots par tour	Nombre d'étages
Nombre de plots rencontrés	Numéro de l'appartement à trouver
Nombre de tours de cercle	Position de l'appartement sur le palier
Numéro du plot final $+1$[1]	Numéro d'étage où se trouve l'appartement

On peut reformulé le problème IEA en terme de promenade circulaire : « Sur un cercle de 8 plots, Matt et Matic ont rencontré sur leur trajet, 31 plots. À quel plot ont-ils terminé leur trajet ? ».

Solution. On fait la division euclidienne de 31 par 8. On trouve un quotient de 3 et un reste de 7. Ainsi, l'appartement n° 31 se trouve au septième étage. □

Remarque 8.42.
Bien que la division euclidienne de 32 par 8 donne 0 comme reste, l'appartement n° 32 se situe bien au huitième étage.

Rangement de Boules dans des Urnes (RBU)

On dispose de 9 urnes numérotées de 1 à 9 et 100 boules numérotées de 1 à 100.

— La boule 1 est déposée dans l'urne n° 1 ;

— la boule 2 est déposée dans l'urne n° 2 ;

— ...

— la boule 9 est déposée dans l'urne n° 9 ;

— la boule 10 est déposée dans l'urne n° 1 ;

— la boule 11 est déposée dans l'urne n° 2...

1. les plots sont numérotés $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}$

À quelle urne sera déposée la boule 67 ?
$\Diamond$
Encore une fois, on peut y voir des similitudes avec le problème de la « Promenade sur le cercle ».

Promenade circulaire	RBU
Nombre de plots par tour	Nombre d'urnes
Nombre de plots rencontrés	Numéro de la boule cible
Nombre de tours de cercle	Position de boules par urne
Numéro du plot final +1[2]	Numéro d'étage où se retrouve la boule cible

On peut reformuler le problème RBU en terme de promenade circulaire : « Sur un cercle de 9 plots, Matt et Matic ont rencontré sur leur trajet, 67 plots. À quel plot ont-ils terminé leur trajet ? »

Solution. On fait la division euclidienne de 67 par 9. On trouve un quotient de 7 et un reste de 4. Ainsi, la boule 67 sera placée dans l'urne n° 4. □

Remarque 8.43.
On peut donner une variante plus difficile au problème RBU. « On dispose de 8 urnes numérotées de 1 à 9 et 100 boules numérotées de 1 à 100.

— La boule 1 est déposée dans l'urne n° 1 ;

— la boule 2 est déposée dans l'urne n° 2 ;

— . . . ;

— la boule 8 est déposée dans l'urne n° 8 ;

— la boule 9 est déposée dans l'urne n° 9 ;

— la boule 10 est déposée dans l'urne n° 8 ;

— la boule 11 est déposée dans l'urne n° 7. . .

À quelle urne sera déposée la boule 67 ? »

8.3.5 Les soldats chinois

Le mathématicien et astronome chinois Sun Zi (né en Chine entre le IIIe et le IVe siècle) publia dans son livre *Sun Tzu Suan Ching* un théorème qui permet de résoudre le problème suivant (problème de décompte des soldats de l'armée du général Han Xing) :

« Combien l'armée de Han Xing comporte-t-elle de soldats si, rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangés par 5 colonnes, il reste trois soldats, et rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ? »

La résolution proposée par Sun Zin pour ce problème est la suivante : « *Multiplie le reste de la division par 3, c'est-à-dire 2, par 70, ajoute-lui le produit du reste de la division par 5, c'est-à-dire 3, avec 21 puis ajoute le produit du reste de la division par 7, c'est-à-dire 2 par 15. Tant que le nombre est plus grand que 105, retire 105.* ».

On remarque que :

— 70 a pour reste 1 dans la division par 3 et pour reste 0 dans les divisions par 5 et 7 ;

— 21 a pour reste 1 dans la division par 5 et pour reste 0 dans les divisions par 3 et 7 ;

— 15 a pour reste 1 dans la division par 7 et pour reste 0 dans les divisions par 3 et 5.

Le nombre $2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15$ a bien alors pour restes respectifs 2, 3 et 2 dans les divisions par 3, 5 et 7. Enfin, comme 105 a pour reste 0 dans les trois types de division, on peut l'ôter ou l'ajouter autant de fois que l'on veut sans changer les valeurs des restes. La plus petite valeur pour le nombre d'objets est alors de 23.

2. les plots sont numérotés $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}$

Théorème 8.44. *Théorème des restes chinois*
Soient $n_1, \dots, n_k$ des entiers deux à deux premiers entre eux, c'est-à-dire que &textPGCD$(n_i, n_j) = 1$ lorsque $i \neq j$. Alors pour tous entiers $a_1, \dots, a_k$, il existe un entier x, unique modulo $n = \prod_{i=1}^k n_i$, tel que :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k}. \end{cases}$$

▶ **Méthode 8.45.**
Une solution x peut être trouvée de la manière suivante. Pour chaque i, les entiers n_i et

$$\tilde{n}_i = \frac{n}{n_i} = n_1 \cdots n_{i-1} n_{i+1} \cdots n_k$$

sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bachet-Bézout, on peut calculer l'inverse v_i de $\tilde{n}_i$ modulo n_i. Pour cela, on utilise l'algorithme d'Euclide étendu et on peut obtenir des entiers u_i et v_i tels que $u_i n_i + v_i \tilde{n}_i = 1$. Si on pose $e_i = v_i \tilde{n}_i$, alors on a :

$$e_i \equiv 1 \pmod{n_i} \quad \text{et} \quad e_i \equiv 0 \pmod{n_j} \quad \text{pour } j \neq i.$$

Une solution particulière de ce système de congruences est par conséquent :

$$x = \sum_{i=1}^k a_i e_i,$$

et les autres solutions sont les entiers congrus à x modulo le produit n.

Exemple 8.46.
On peut traduire le problème de comptage des soldats de l'armée du général Han Xing par un système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

on obtient alors :

— $n = 3 \times 5 \times 7 = 105$;

— $n_1 = 3$ et $\tilde{n}_1 = 35$, or $2\tilde{n}_1 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $e_1 = 70$;

— $n_2 = 5$ et $\tilde{n}_2 = 21$, or $\tilde{n}_2 \equiv 1 \pmod{5}$ donc $e_2 = 21$;

— $n_3 = 7$ et $\tilde{n}_3 = 15$, or $\tilde{n}_3 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $e_3 = 15$.

Une solution pour x est alors :

$$x = 2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$$

et les solutions sont tous les entiers congrus à 233 modulo 105, c'est-à-dire 23 modulo 105.

8.4 Compléments sur les relations

8.4.1 Relations binaires

Définition 8.47.
Une *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est une propriété portant sur les couples d'éléments de E. On notera $a\mathscr{R}b$ le fait que la propriété est vraie pour le couple $(a, b) \in E \times E$.

Exemples 8.48.
- L'inégalité $\leqslant$ est une relation sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.
- Le parallélisme et l'orthogonalité sont des relations sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace.
- L'inclusion $\subset$ est une relation sur $\mathscr{P}(X)$ où X est un ensemble quelconque.

Définition 8.49.
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E.
- $\mathscr{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, on a $x\mathscr{R}x$;
- $\mathscr{R}$ est symétrique si pour tout $x, y \in E$, on a $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$;
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, on a $(x\mathscr{R}y$ et $y) \Rightarrow x = y$;
- $\mathscr{R}$ est transitive si pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

8.4.2 Relations d'équivalence

Définition 8.50.
Une relation binaire est une *relation d'équivalence* si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples 8.51.
- Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites.
- Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. La relation sur E définie par $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ est une relation d'équivalence.

Définition 8.52.
Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et a un élément de E. On appelle *classe d'équivalence* de a l'ensemble $\mathscr{C}(a) = \{x \in E \mid x\mathscr{R}a\}$.

Propriété 8.53.
Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E et que $a, b \in E$ vérifiant $a\mathscr{R}b$, alors a et b ont même classe d'équivalence.

Théorème 8.54.
Une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur un ensemble E définit une partition de E dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$.

Réciproquement, une partition de E définit sur E une relation d'équivalence dont les classes coïncident avec les éléments de la partition.

Définition 8.55.
L'ensemble des classes d'équivalence se nomme *ensemble quotient* de E par $\mathscr{R}$ et se note $E/\mathscr{R}$.

L'application $E \to E/\mathscr{R}$ qui à tout élément x de E associe sa classe d'équivalence se nombre *application* (ou *projection*) *canonique*.

8.4.3 Relations d'ordre

Définition 8.56.
Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation *d'ordre* si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On dit alors que E est un ensemble *ordonné* (par $\mathscr{R}$). Une relation d'ordre est souvent notée $\leqslant$.

Exemples 8.57.

- L'inégalité $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.
- L'inclusion est une relation d'ordre.

Définition 8.58.

Une relation d'ordre sur E est dite *totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables : pour tout $x, y \in E$, on a $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$.

Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel.

Exemples 8.59.

- $\leqslant$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.
- En général, l'inclusion est un ordre partiel.
- La divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel.

Définition 8.60.

Une relation binaire est un ordre strict si elle est transitive et vérifie $x\mathscr{R}y \Rightarrow x \neq y$.

Exemple 8.61.

L'inégalité stricte $<$ définit un ordre strict sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

Définition 8.62.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie non vide de E.

- si $a \in E$ vérifie $x \leqslant a$ (resp. $x \geqslant a$) pour tout $x \in A$, on dit que a est un *majorant* (resp. *minorant*) de A ;
- si $a \in A$ est un majorant (resp. minorant) de A, on dit que a est un *maximum* (resp. *minimum*) de A. On note $a = \max A$ (resp. $a = \min A$) ;
- Si l'ensemble des majorants de A n'est pas vide et qu'il admet un minimum (resp. maximum), il est appelé *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) de A et se note $\sup A$ (resp. $\inf A$).

LEÇON

9

Différentes écritures d'un nombre complexe.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Terminale Maths Expertes et Terminale STI2D

Prérequis : Les différents ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Références :

[1] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Expertes*, Magnard 2020. [url]

[2] J.-L. Rouget, *Nombres complexes*, Maths-France.fr. [url]

[3] Y. Monka, *Nombres complexes (partie 1)*, Maths-et-tiques.fr [url]

[4] Y. Monka, *Nombres complexes (partie 2)*, Maths-et-tiques.fr [url]

[5] Y. Monka, *Nombres complexes (partie 3)*, Maths-et-tiques.fr [url]

[6] Y. Monka, *Nombres complexes (partie 4)*, Maths-et-tiques.fr [url]

[7] N. Daval, *Ch4 : Nombres complexes (TS)* [url]

[8] C. Bertault, *Nombres complexes*, Mathématiques en MPSI [url]

[9] G. Costantini, *Cours sur les nombres complexes*, Bacamaths.net [url]

9.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

9.1.1 Partie réelle et partie imaginaire

[1, Chapitre 1] [2] [3] [7] [8] [9]

9.1.2 Opérations sur les formes algébriques

[1, Chapitre 1] [2] [3] [7] [8] [9]

9.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

[1, Chapitre 1] [2] [3] [7] [8] [9]

9.1.4 Représentation graphique d'un nombre complexe

[1, Chapitre 2] [2] [4] [7] [8] [9]

9.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

9.2.1 Module et argument

[1, Chapitre 2] [2] [4] [7] [8] [9]

9.2.2 Forme trigonométrique et interprétation graphique

[1, Chapitre 2] [7] [9]

9.2.3 Formules d'addition et de duplication

[1, Chapitre 2] [5]

9.2.4 Opérations sur les formes trigonométriques

9.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

9.3.1 L'ensemble $\mathbb{U}$

[2] [4] [8]

9.3.2 L'exponentielle complexe

[1, Chapitre 2] [2] [5] [7] [8] [9]

9.3.3 Opérations sur les formes exponentielles

[1, Chapitre 2] [2] [8] [9]

9.4 Passer d'une forme à l'autre

9.4.1 Algébrique $\leftrightarrow$ trigonométrique

[8]

9.4.2 Trigonométrique $\leftrightarrow$ exponentielle

[2] [8]

9.5 Applications

9.5.1 Formules de Moivre, formules d'Euler

[2] [5] [9]

9.5.2 Équations du second degré

[1, Chapitre 1] [2] [7] [8] [9]

9.5.3 Ensembles géométriques

[1, Chapitre 2] [2] [6] [8] [9]

9.5.4 Racines $n$ième de l'unité

[1, Chapitre 2] [2] [6] [8]

9.5.5 Écriture complexe des transformations

[2] [7] [8] [9]

LEÇON

10 Utilisation des nombres complexes en géométrie.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Terminale Maths Expertes et Terminale STI2D

Prérequis : Construction de l'ensemble $\mathbb{C}$, forme algébrique (opérations, propriétés, conjugué), forme trigonométrique (module, argument), suites numériques, transformations géométriques, trigonométrie.

Références :

[1] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Expertes*, Magnard 2020. [url]

[2] J.-L. Rouget, *Nombres complexes*, Maths-France.fr. [url]

[3] Y. Monka, *Nombres complexes (partie 4)*, Maths-et-tiques.fr [url]

[4] P. Lux, *Application des nombres complexes en géométrie*, pierrelux.net [url]

[5] N. Daval, *Ch4 : Nombres complexes (TS)* [url]

[6] *Nombres complexes et géométrie*, Université Claude Bernard Lyon 1, L1 de Mathématiques, Algèbre Année 2013–2014. [url]

[7] G. Costantini, *Cours sur les nombres complexes*, Bacamaths.net [url]

[8] *Interprétations géométriques des nombres complexes. Module et argument*, Université Claude Bernard Lyon 1, CAPES de Mathématiques. [url]

10.1 Représentation graphique d'un nombre complexe

10.1.1 Forme algébrique et conjugué

[1, Chapitre 2] [2] [6] [7] [8]

10.1.2 Forme trigonométrie et exponentielle

[2] [5] [7] [8]

10.2 Ensembles de points

10.2.1 Applications géométriques du module et de l'argument

[1, Chapitre 2] [2] [3] [4] [5] [8]

10.2.2 Médiatrice

[3] [4] [7]

10.2.3 Cercles et disques

[3] [4] [7] [8]

10.3 Utilisation des nombres complexes en trigonométrie

10.3.1 Formules de Moivre et d'Euler

[2] [7]

10.3.2 Polynômes de Tchebychev

[2]

10.4 Suites de nombres complexes et géométrie

10.4.1 Points alignés

[1, ex. 139 ch.2]

10.4.2 Triangle rectangle isocèle

BAC Amérique du sud. Novembre 2017 Exo 4.

10.4.3 Escargot

[1, ex. 123 ch.2] BAC Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

10.5 Racine $n$ième de l'unité et applications géométriques

10.5.1 Théorie

[1, Chapitre 2] [2] [3]

10.5.2 Polygones réguliers

[1, ex 149 ch.2] [2] [3]

10.5.3 Construction du pentagone à la règle et au compas

[2] [3]

10.6 Écriture complexe des transformations

[1, ex 152, ch.2]

10.6.1 Translations, homothéties et rotation

[2] [4] [5] [6] [7]

10.6.2 Étude de la transformation $z \mapsto az + b$

[2] [6]

LEÇON

11

TRIGONOMÉTRIE.

Préambule

Niveau : troisième (trigonométrie dans un triangle rectangle), première « Mathématiques Scientifique » (trigonométrie dans le cercle), terminale « Mathématiques Expertes » (formules trigonométriques).

Prérequis : géométrie du triangle, théorème de Pythagore, notion de fonction, produit scalaire

Références :

[1] E. SUQUET, *Trigonométrie*. Troisième. [url].

[2] G. COSTANTINI, *Trigonométrie et fonctions circulaires*. Première S. [url].

11.1 De la trigonométrie vue en classe de troisième

11.1.1 Définitions

Définition 11.1.
Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$

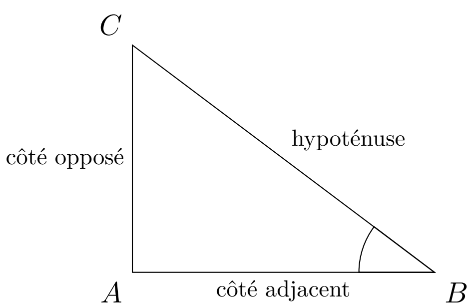


FIGURE 11.1 – Côté opposé, côté adjacent à un angle, hypoténuse

Remarque 11.2.

On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \ \sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \ \tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

Propriété 11.3.
Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.

Remarques 11.4. Sur la calculatrice (Casio FX-92)

1. Lorsque l'on connaît le sinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - sin .
2. Lorsque l'on connaît le cosinus d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - cos .
3. Lorsque l'on connaît le tangente d'un angle, on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant les touches : Shift - tan .

Exemples 11.5. *Connaissant sinus, cosinus et tangente*

1. Si $\sin\widehat{ABC} = 0,8$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 53,13$ degrés à $0,01$ près.
2. Si $\cos\widehat{ABC} = 0,5$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 60$ degrés.
3. Si $\tan\widehat{ABC} = 0,2$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC} = 11,30$ degrés à $0,01$ près.

11.1.2 Formules de trigonométrie

Propriété 11.6.
Pour toutes valeurs de x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Démonstration de la propriété 11.6. ◊ On se place dans le cas où x est une valeur strictement compris entre 0 et 90 degrés. Prenons un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = x$. On a alors :

$$\cos x = \frac{AB}{BC}, \ \sin x = \frac{AC}{BC}, \ \tan x = \frac{AC}{AB}.$$

Ainsi,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

On sait que le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

De plus :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan x.$$

□

11.1.3 Quelques exemples

Exemples 11.7.

1. Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $\widehat{DEF} = 30°$ et $DF = 5$. Quelle est la mesure de EF ?
   Comme DEF est un triangle rectangle en D :
$$\begin{aligned} \sin \widehat{DEF} &= \frac{DE}{DF} \\ \sin 30 &= \frac{DE}{5} \\ DE &= 5 \times \sin 30 \\ DE &= 2,5 \end{aligned}$$
2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $AC = 7$. On veut déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à $0,01$ près. Comme ABC est un triangle rectangle en A.
$$\begin{aligned} \tan \widehat{ABC} &= \frac{AC}{AB} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{7}{5} \\ \widehat{ABC} &= 50,19 \text{ degrés à 0,01 près.} \end{aligned}$$
   La dernière étape est faite grâce à la calculatrice (en tapant les touches Shift - tan).

11.2 De la trigonométrie vue en classe de Première S

11.2.1 Le radian

Définition 11.8. *Radian*
Le *radian* est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Remarque 11.9.
Pour trouver la mesure d'un angle de x degrés, on a recours à un tableau de proportionnalité.

degrés	180	x
radians	π	α

Exemple 11.10.
Un angle de 60° vaut en radians :
$$\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

11.2.2 Cercle trigonométrique

Définition 11.11. *Cercle trigonométrique*
Si on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 11.12. *Sinus et cosinus*

On appelle *cosinus* et *sinus* de α et on note $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OI} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OJ}.$$

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$. Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0,1)$, ni en $J'(0,-1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Définition 11.13. *Tangente*

On appelle *tangente* de α et on note $\tan\alpha$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

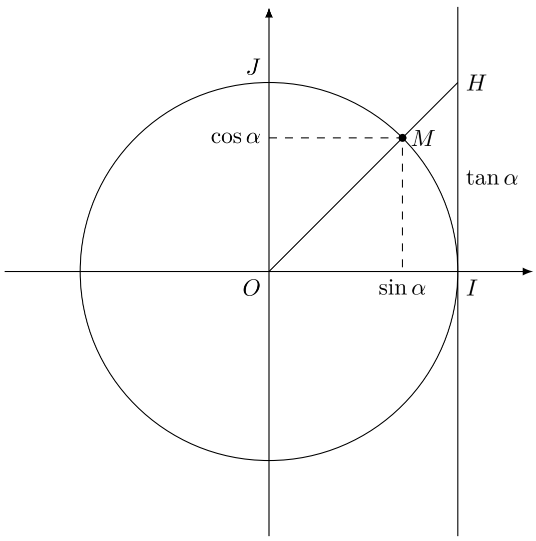


Figure 11.2 – Cercle trigonométrique, cosinus, sinus et tangente d'un angle

La table 11.1 rappelle les valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Table 11.1 – Valeurs remarquables

Calcul de valeurs remarquables. ◊ Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$, on exploite la diagonale du carré (de côté 1).

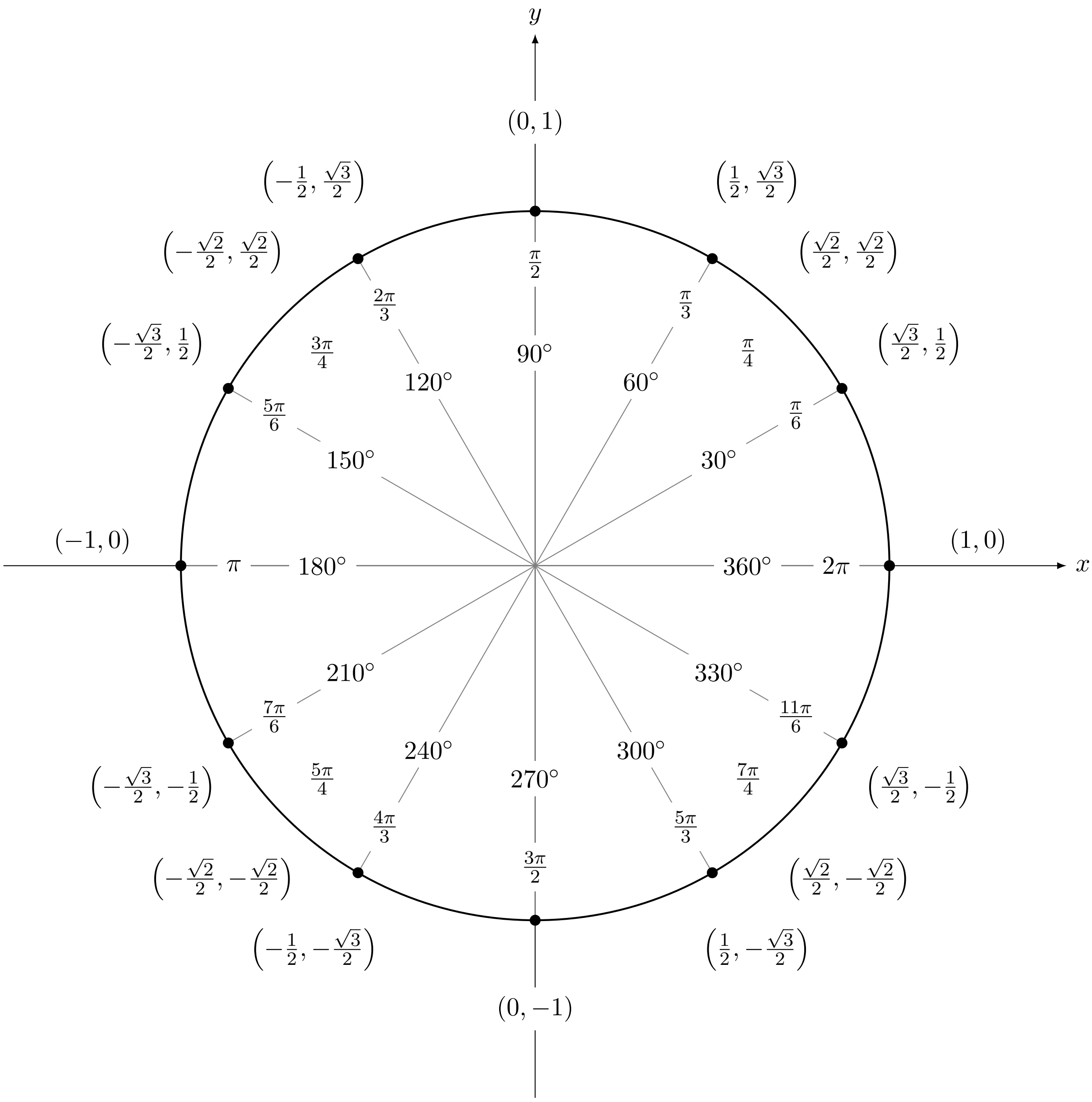
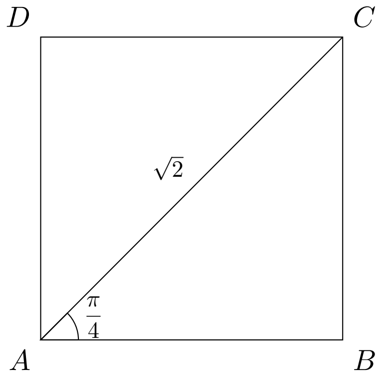


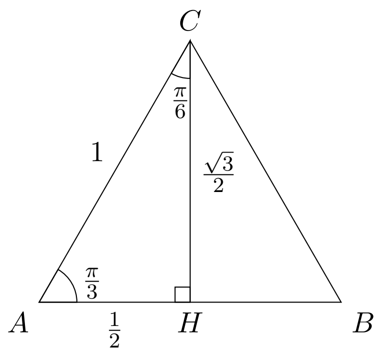
Figure 11.3 – Cercle trigonométrique et quelques valeurs remarquables



Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{4} &= \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\frac{\pi}{4} &= \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \tan\frac{\pi}{4} &= \frac{BC}{AB} = 1.\end{aligned}$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui, d'après le théorème de Pythagore, mesure $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2},\ \tan\frac{\pi}{3} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$\square$

Propriété 11.14. *Sinus et cosinus*

1. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
2. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
5. $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Exemple 11.15.

On admet que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, on veut calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$. On utilise la relation 3 :

$$\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1.$$

On calcule $\cos^2\frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

D'où :

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Or $\sqrt{A^2} = |A|$ donc :

$$\left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

Or, $\sin\frac{\pi}{12} \geqslant 0$ car $\frac{\pi}{12} \in [0;\pi]$. Donc :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

11.2.3 Fonction sinus et cosinus

Définition 11.16. *Fonction périodique*

Une fonction f est dite *périodique* de période T si pour tout réel x, on a : $f(x+T) = f(x)$.

Pour étudier une fonction périodique, on se limite à une période car :

$$\cdots = f(x+2T) = f(x+T) = f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = \cdots$$

Théorème 11.17.
Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin x$).

11.2.4 Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ($x \in \mathbb{R}$)

— Si $a \notin [-1;1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$)

— Si $a \in [-1;1]$, elles ont une infinité

Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0;2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

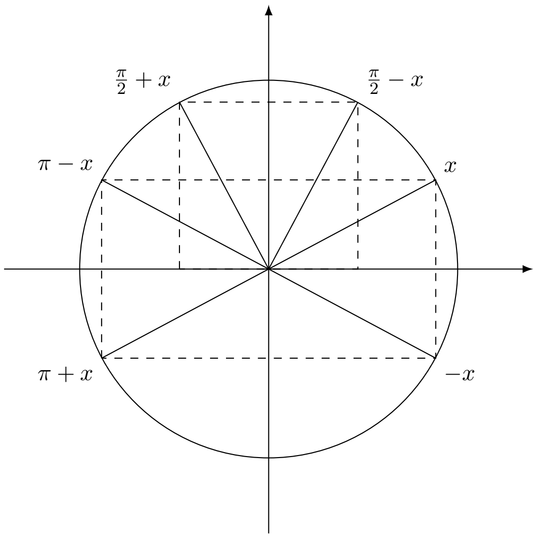
Pour $\cos x = a$ on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0;2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.2.5 Angles associés

Propriétés 11.18.
On a les propriétés suivantes :

1. $\cos(-x) = \cos x$,
2. $\sin(-x) = \sin x$,
3. $\cos(\pi - x) = -\cos x$,
4. $\sin(\pi - x) = \sin x$,
5. $\cos(\pi + x) = -\cos x$,
6. $\sin(\pi + x) = -\sin x$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$,
8. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$,
9. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$,
10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.



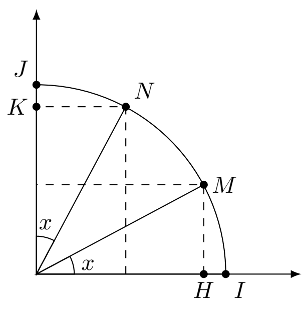
Démonstration des propriétés 11.18. Les relations $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ s'obtiennent immédiatement par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Supposons tout d'abord que x est un angle aigu (c'est-à-dire $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. On montre les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

On note I, J, M et N les points du cercle trigonométrique correspondants aux angles de 0, $\frac{\pi}{2}$, x et $\frac{\pi}{2} - x$ radians respectivement. Notons H (resp. K) le projeté orthogonal de M (resp. N) sur l'axe des abscisses (resp. ordonnées). D'après la relation de Chasles sur les angles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}) = x \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$



Les coordonnées du point M sont $M(\cos x, \sin x)$, celles du point N sont : $N(\cos(\frac{\pi}{2} - x), \sin(\frac{\pi}{2} - x))$. Comme x est un angle aigu, toutes ces coordonnées sont positives et :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = KN \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = OK.$$

Mais par ailleurs, d'après les relations métriques dans le triangle ONK rectangle en K, on a :

$$\cos x = OK \quad \text{et} \quad \sin x = KN.$$

D'où les relations : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$. Les autres relations se démontrent de manière analogue.

Par exemple, si x appartient à $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, on pose $y=-x$. Comme y est un angle aigu, on a, par exemple, en utilisant ce qui précède :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=-\sin y,$$

c'est-à-dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(-x)=-\sin x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(-x)=\sin x.$$

De même, si x appartient à $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, alors on pose $y=\pi-x$ et on utilise les formules précédentes. □

11.2.6 Formules trigonométriques

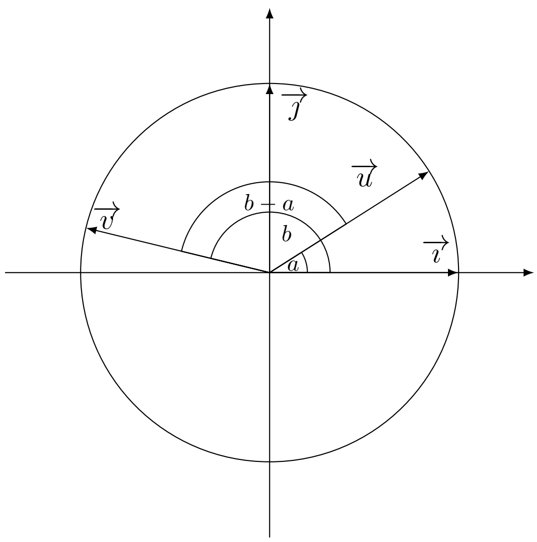
Proposition 11.19. *Formules d'addition*

1. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$,
2. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$,
3. $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$,
4. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.

Justification d'une formule de trigonométrie. ◊

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath},\vec{u})=a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath},\vec{v})=b.$$



Une première expression du produit scalaire donne :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{\imath})+(\vec{\imath},\vec{v})=b-a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

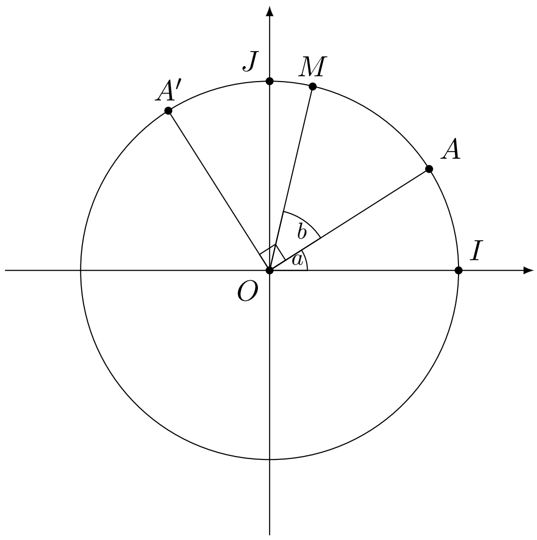
D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$.



D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

□

Proposition 11.20. *Formules de duplication*

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Démonstration de la proposition 11.20. ◊

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

□

Proposition 11.21. *Formule de linéarisation*

1. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$,
2. $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Démonstration de la proposition 11.21. ◊ On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$. □

Exemple 11.22.

On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

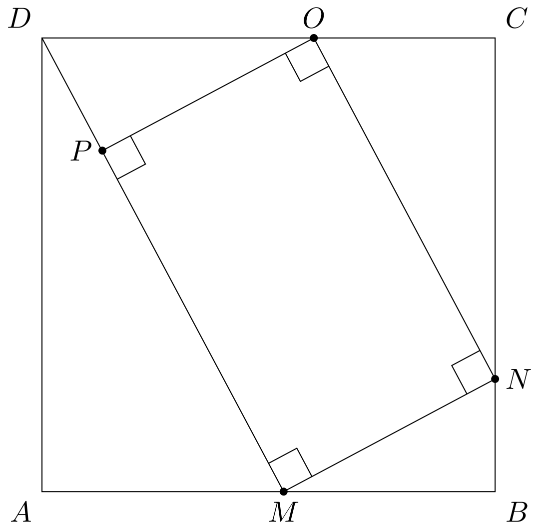
11.3 Un exercice utilisant la trigonométrie

▶ **Exercice 11.23.**
Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On place un point M sur le côté $[AB]$ du carré (distinct de A et B) et on trace le segment $[MD]$.

Existe-il un carré $MNOP$ tel que N, O et P appartiennent respectivement aux segments $[BC]$, $[CD]$ et $[MD]$? Si oui, quelle est l'aire de ce carré ?

Solution de l'exercice. $\Diamond$

Figure de l'énoncé



Calcul de la longueur du segment $[MD]$ On note $AM = x$ et on sait que $AD = 1$. On travaille dans le triangle MAD rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MD^2 &= AM^2 + AD^2 \\ MD^2 &= x^2 + 1^2 \\ MD^2 &= x^2 + 1 \\ MD &= \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{AMD}$ **et** $\widehat{ADM}$ Toujours dans le triangle MAD rectangle en A, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\widehat{ADM}\right) &= \frac{AM}{AD} = \frac{x}{1} = x \Leftrightarrow \widehat{ADM} = \arctan(x) \\ \tan\left(\widehat{AMD}\right) &= \frac{AD}{AM} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \widehat{AMD} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On préférera utiliser la mesure de l'angle $\widehat{ADM}$ pour la suite de l'exercice.

Calcul de la longueur du segment $[MN]$ Si $AM = x$ alors $MB = 1 - x$. De plus, les angles $\widehat{AMD}$, $\widehat{DMN}$ et $\widehat{NMB}$ sont adjacents, la somme des mesures des trois angles est égale à π (radians). Donc :

$$\widehat{BMN} = \pi - \widehat{DMN} - \widehat{AMD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AMD} = \widehat{ADM}.$$

Donc : $\widehat{BMN} = \arctan(x)$. Ainsi,

$$\cos\left(\widehat{BMN}\right) = \frac{BM}{MN} \Leftrightarrow \cos(\arctan(x)) = \frac{1-x}{MN} \Leftrightarrow MN = \frac{1-x}{\cos(\arctan(x))}.$$

Dans la suite de l'exercice, on notera $\Phi(x) = \cos(\arctan(x))$ et $\Phi^2(x) = (\Phi(x))^2$.

Calcul de la longueur du segment $[BN]$ Dans le triangle BMN rectangle en B, on sait que $BM = 1 - x$ et $MN = \dfrac{1-x}{\Phi(x)}$. On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du segment $[BN]$.

$$\begin{aligned} MN^2 &= BN^2 + BM^2 \\ BN^2 &= MN^2 - BM^2 \\ BN^2 &= \left(\frac{1-x}{\Phi(x)}\right)^2 - (1-x)^2 = \frac{(1-x)^2 - (1-x)^2\Phi^2(x)}{\Phi^2(x)} = \frac{(1-x)^2}{\Phi^2(x)}\left(1-\Phi^2(x)\right) \\ BN &= \sqrt{\frac{(1-x)^2}{\Phi^2(x)}(1-\Phi^2(x))} = \frac{(1-x)}{\Phi(x)}\sqrt{1-\Phi^2(x)} \end{aligned}$$

Calcul de la longueur du segment $[CN]$ Si :

$$BN = \frac{(1-x)}{\Phi(x)}\sqrt{1-\Phi^2(x)}$$

alors :

$$CN = 1 - BN = 1 - \frac{1-x}{\Phi(x)}\sqrt{1-\Phi^2(x)} \qquad = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)}$$

Calcul de la longueur du segment $[ON]$ Par le même argument sur l'adjacence des angles, on peut dire que $\widehat{BMN} = \widehat{ONC}$. On veut calculer la longueur du segment $[ON]$, on se place dans le triangle NCO rectangle en C. On sait que :

$$\widehat{ONC} = \arctan(x) \quad \text{et} \quad CN = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)}$$

D'où :

$$\cos(\widehat{ONC}) = \frac{CN}{ON} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)} \times \frac{1}{ON}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} ON &= \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi(x)} \times \frac{1}{\Phi(x)} \\ &= \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi^2(x)} \end{aligned}$$

Résolution de l'équation $MN = ON$ Pour répondre au problème posé, il faut résoudre l'équation $MN = ON$ (c'est-à-dire $MNOP$ est un carré). Ainsi :

$$\begin{aligned} MN = ON &\Leftrightarrow \frac{1-x}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}}{\Phi^2(x)} \\ &\Leftrightarrow (1-x)\Phi^2(x) = \Phi(x)\left[\Phi(x) - (1-x)\sqrt{1-\Phi^2(x)}\right] \end{aligned}$$

On peut simplifier par $\Phi(x) = \cos\arctan(x)$ des deux côtés de l'égalité car $\cos\arctan(x) \neq 0$ pour $x \in [0;1]$. Ainsi :

$$MN = ON \Leftrightarrow (1-x)\cos\arctan(x) = \cos\arctan(x) - (1-x)\sqrt{1-\cos\arctan(x)^2}.$$

On ne peut pas résoudre cette équation algébriquement. On a recours à la méthode graphique :

Conclusion Sur l'intervalle $[0;1]$, il n'y a qu'une seule intersection entre les deux courbes en $x = 0$. Or, ce cas ($x = 0$) correspond au cas où $M = A$. Comme il est exclu, il n'existe pas de carré $MNOP$ qui répond à notre problème.

□

LEÇON

12 Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère.

Préambule

Niveau : transversal

Prérequis : éléments de base de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, sphère, section de la sphère par un plan

Références :

[1] D. Feldmann, *21. Géométrie analytique*. URL : [url].

[2] Contributeurs de Wikipédia, *Base orthonormale*. Wikipédia.

[3] D. Fraisse, *Chapitre 9 : Sphère, repérage dans l'espace et calcul de volumes*. Collège privé Sacré-Coeur Annonay, Cours de troisième. 2012.

[4] G. Costantini, *Exercices de Géométrie Analytique*. URL : [url].

[5] J. Onillon, *Géométrie analytique : un regard d'un autre temps*. 2007. [url].

[6] Contributeurs de Wikipédia, *Géométrie analytique*. Wikipédia.

[7] Contributeurs de Wikipédia, *Repérage dans le plan et dans l'espace*. Wikipédia.

[8] Contributeurs de Wikipédia, *Système de coordonnées*. Wikipédia.

[9] Collectif de professeurs Sesamaths. *Sesamaths, Term S*. Magnard, 2013.

12.1 Définition d'un repère

12.1.1 Droite graduée

Définition 12.1. *Droite graduée*

Pour graduer une droite, on prend sur cette droite un point O appelé *origine* et le représentant d'un vecteur $\vec{\imath}$ passant par O qui définit l'*unité* : on parle du repère $(O, \vec{\imath})$.

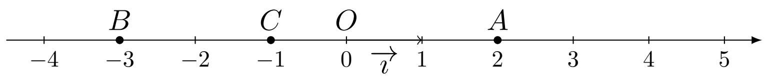
Propriété 12.2.
Sur une droite graduée par le repère $(O, \vec{\imath})$, à tout point A correspond un unique nombre x appelé *abscisse* de A.

On a :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath}$$

et on note $A(x)$.

Exemple 12.3.



— L'abscisse du point A est 2.

— L'abscisse du point B est -3.

— L'abscisse du point C est -1.

12.1.2 Repérage dans le plan

Définition 12.4. *Repérage dans le plan*

Pour munir le plan d'un repère, on prend dans ce plan un point O appelé *origine* et les représentants de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ passant par O qui définissent les unités respectivement « horizontales » et « verticales ». Ainsi le triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme un *repère* du plan.

Propriété 12.5.
Dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, à tout point A correspond un unique couple (x, y) de nombres appelés *coordonnées* de A. On a :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$$

et on note $A(x, y)$ ou $A(x; y)$.

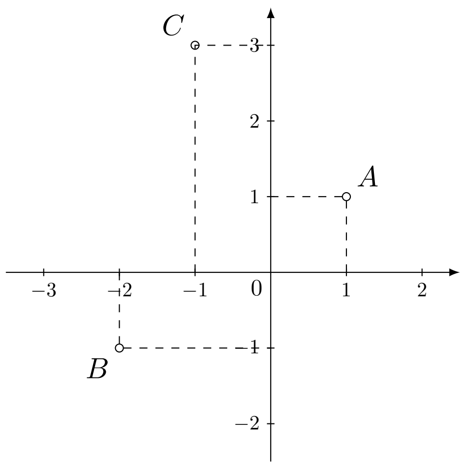
Définition 12.6. *Vocabulaire*

— x est l'*abscisse* de A ;

— y est l'*ordonnée* de A ;

— la droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée *axe des abscisses* et celle sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée *axe des ordonnées*.

Exemple 12.7.



— Les coordonnées de A sont $(+1, +1)$. Son abscisse est $+1$, son ordonnée est $+1$. On note $A(1, 1)$.

— Les coordonnées de B sont $(-2, -1)$. Son abscisse est -2, son ordonnée est -1. On note $B(-2, -1)$.

— Les coordonnées de C sont $(-1, 3)$. Son abscisse est -1, son ordonnée est 3. On note $C(-1, 3)$.

Définition 12.8. *Repère orthogonal et repère orthonormal*

Un repère dont les axes sont perpendiculaires est dit *orthogonal*.

Un repère orthogonal tel que les normes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ soient chacune égales à 1 est dit *orthonormé* ou *repère orthonormal*.

12.1.3 Repère dans l'espace

Définition 12.9. *Repérage dans l'espace*

Pour munir l'espace d'un repère, on prend un point O appelé *origine* et les représentants de trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ passant par O qui définissent les unités et les directions, respectivement « gauche-droite », « avant-arrière » et « verticale ». Le quadruplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ forme un *repère* dans l'espace.

Propriété 12.10.
Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, à tout point A correspond un unique triplet (x, y, z) de nombres appelés *coordonnées* de A. On a :

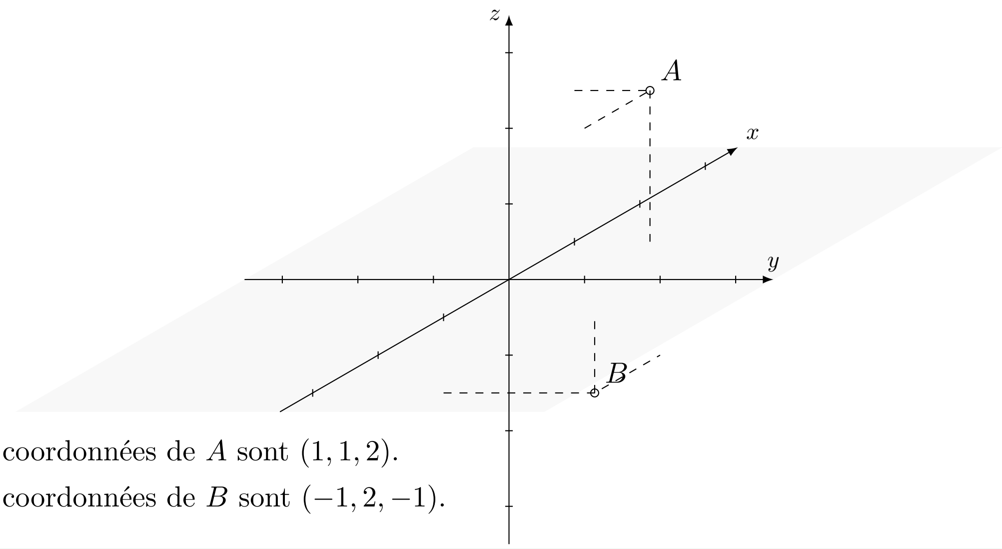
$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

et on note $A(x, y, z)$ ou $A(x; y; z)$.

Définition 12.11. *Vocabulaire*

- x est l'*abscisse* de A ;
- y est l'*ordonnée* de A ;
- z est la *cote* de A ;
- la droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée *axe des abscisses* ;
- la droite sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée *axe des ordonnées* ;
- la droite sur laquelle on lit les cotes est appelée *axe des cotes*.

Exemple 12.12.



- Les coordonnées de A sont $(1, 1, 2)$.
- Les coordonnées de B sont $(-1, 2, -1)$.

Définition 12.13. *Repère orthogonal, orthonormal*

Un repère dont les axes sont perpendiculaires est dit *orthogonal*.

Un repère orthogonal dont les normes des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont chacune égales à 1 est dit *orthonormé*, ou *repère orthonormal*.

12.1.4 Repérage sur un cercle ?

Définition 12.14.

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition 12.15.
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Un point M du plan est parfaitement repéré si on connait la distance $OM = \rho$ et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox. Ainsi $M(\rho; \theta)$ sont les *coordonnées polaires* du point M.

Remarque 12.16.
Quand on aborde les nombres complexes, le passage entre forme algébrique et forme trigonométrique (ou exponentielle) est un changement de coordonnées (du passage coordonnées cartésienne vers les coordonnées polaires).

Théorème 12.17. *Changement de coordonnées*

— Si on connaît $M(\rho; \theta)$ (coordonnées polaires) alors $M(x; y)$ (coordonnées cartésiennes) tels que :

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta.$$

— Si on connaît $M(x; y)$ (coordonnées cartésiennes) alors $M(\rho; \theta)$ (coordonnées polaires) tels que :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et

  — si $\rho = 0$ alors θ peut prendre n'importe quelle valeur réelle ;

  — si $\rho \neq 0$ alors on peut obtenir une unique valeur de θ si on se restreint à l'intervalle $[0; 2\pi[$. On peut utiliser les formules suivantes :

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ et } y \geqslant 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x > 0 \text{ et } y \geqslant 0, \end{cases}$$

12.1.5 Compléments : base orthonormale

Définition

Définition 12.18.
Soit E_n un espace vectoriel de dimension n, où n est un entier naturel, et $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ une base de E_n. On dit que $\mathscr{B}$ est *orthonormale* si et seulement si :

— $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \dots = \|\vec{e_n}\| = 1$;

— pour tout $i \neq j$, $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}$.

Définition 12.19.
Soit $\mathscr{A}_n$ un espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel euclidien E_n et O un point quelconque de $\mathscr{A}_n$, alors le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ est dit *orthonormal* si et seulement si sa *base associée* $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ est elle-même orthonormale.

Calculs dans une base orthonormée

Propriété 12.20.
Soit $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ une base orthonormale de E_n.

1. La décomposition d'un vecteur de E_n dans cette base est donnée par :
$$\forall \vec{x} \in E_n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e_i}, \vec{x} \rangle \, \vec{e_i}.$$
2. L'expression du produit scalaire de deux vecteurs de E_n est alors donnée par :
$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e_i}, \vec{x} \rangle \langle \vec{e_i}, \vec{y} \rangle .$$
3. L'expression du carré de la norme d'un vecteur de E_n est donc :
$$\forall \vec{x} \in E_n, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e_i}, \vec{x} \rangle^2 .$$

Ces trois propriétés sont en fait équivalentes entre elles, et équivalentes au fait que la famille $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ soit une base orthonormale de E_n.

Procédé de Gram-Schmidt

Théorème 12.21. *Orthonormalisation de Gram-Schmidt*
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs. Alors, il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ unique telle que :

1. pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$;
2. pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, $\langle e_k, v_k \rangle > 0$.

► **Méthode 12.22.**
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, puis $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base de E. On va construire à partir de la famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui sera donc une base orthonormale.

L'algorithme est le suivant :

1. poser $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$;
2. une fois les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_k$ calculés, chercher le vecteur e_{k+1} sous la forme :
$$e_{k+1} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k + \beta x_{k+1};$$
pour trouver les constantes :
   — calculer $\langle e_{k+1}, e_j \rangle = 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, pour obtenir α_j en fonction de β ;
   — calculer $\langle e_{k+1}, e_{k+1} \rangle = 1$ pour obtenir β^2 ;
   — prendre $\beta > 0$ grâce à $\langle e_{k+1}, x_{k+1} \rangle > 0$: on a β puis tous les α_j.

12.2 Utilisation des repères

12.2.1 Caractéristique de la géométrie analytique

Norme d'un vecteur, distance entre deux points

Théorème 12.23. *Norme d'un vecteur*
Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ alors sa norme est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration. ◊ On appelle M le point du plan défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. M a alors pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (qu'on suppose orthonormé).

Soit P le projeté du point M sur l'axe Ox parallèlement à l'axe Oy et Q le projeté du point M sur l'axe Oy parallèlement à l'axe Ox.

Comme le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé, le parallélogramme $OPMQ$ est un rectangle. Le triangle OMP est donc rectangle en P. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 = OP^2 + OQ^2.$$

Or la distance OM est égale à la norme du vecteur $\vec{u}$, $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OQ} = y\vec{\jmath}$, ainsi on a :

$$\|\vec{u}\|^2 = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 = \|x\vec{\imath}\|^2 + \|y\vec{\jmath}\|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

Par passage à la racine carrée, on en déduit le résultat du théorème. □

Le théorème précédent permet de calculer la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Elle est égale à la norme du vecteur

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Théorème 12.24.
Dans un repère orthonormé, la distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Formule du produit scalaire

Définition 12.25. *Produit scalaire*
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et défini par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right]$$

Théorème 12.26. *Produit scalaire et coordonnées dans un repère orthonormé*
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ dans un repère orthonormé quelconque alors :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'.$$

Démonstration. ◊ Comme l'on travaille dans un repère orthonormé, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle &= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}[(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)] \\ &= \frac{1}{2}[x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2] \\ &= \frac{1}{2}(2xx'+2yy') = \frac{1}{2}\times 2\times[xx'+yy'] = xx'+yy'.\end{aligned}$$

□

Distance entre un point et une droite

Théorème 12.27.
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la distance entre le point $A(x_A, y_A)$ et la droite $\mathscr{D}$ dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$ est donnée par :

$$d(A;\mathscr{D}) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration. ◊ Soit A' le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$. On sait que :

$$d(A;\mathscr{D}) = AA'.$$

Si $\mathscr{D}$ a pour équation $ax+by+c=0$ alors son vecteur normal $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$. Ce dernier vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'}-x_A \\ y_{A'}-y_A\end{pmatrix}$. On peut donc écrire les égalités suivantes :

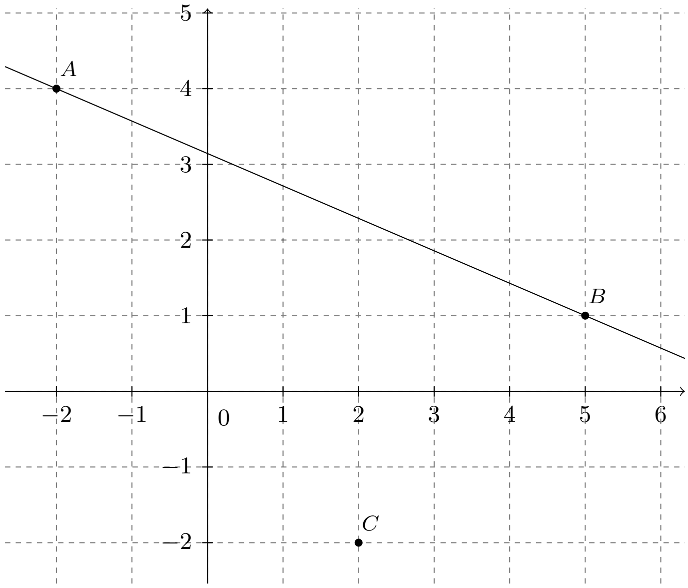
$$\begin{aligned}\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AA'}\right\rangle &= \pm[\sqrt{a^2+b^2}]\times AA' \\ &= a(x_{A'}-x_A)+b(y_{A'}-y_A) = ax_{A'}+by_{A'}-ax_A-by_A = -[ax_A+by_A+c].\end{aligned}$$

On peut supprimer ± en passant par les valeurs absolues, cela donne :

$$\sqrt{a^2+b^2}\times AA' = |ax_A+by_A+c| \Leftrightarrow AA' = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

□

Exemple 12.28.
Soit $A(-2,4)$, $B(5,1)$ et $C(2,-2)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On cherche la distance du point C par rapport à la droite (AB).



Développement. ◊ Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB). $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Ainsi, on trouve une équation cartésienne de (AB) (en exercice) : $3x - 7y + 34 = 0$. On applique la formule précédente :

$$d(C; (AB)) = \frac{|3x_C - 7y_C + 34|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}} = \frac{|3 \times 2 - 7 \times (-2) + 34|}{\sqrt{9 + 49}} = \frac{6 + 14 + 34}{\sqrt{58}} = \frac{54}{\sqrt{58}}.$$

□

Équation d'un cercle

Théorème 12.29.
Dans un repère orthonormé, tout cercle $\mathscr{C}$ admet une équation cartésienne de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois réels.

Démonstration. ◊ Soit $I(\alpha, \beta)$. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Un point $M(x, y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $IM = r$. Cela se traduit par l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow IM = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Si on pose $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$ et $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$, on obtient une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$. □

On va maintenant déterminer à quelle condition l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ se rapporte-elle à un cercle.

Démonstration. ◊ On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c. \end{aligned}$$

De là, il faut savoir si $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ peut être le carré d'un rayon. Pour cela, il faut distinguer trois cas :

— Si la quantité $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ est négative alors la dernière équation devient :

$$M(x;y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow IM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0.$$

Or, un carré n'est jamais négatif. Aucun point M ne peut la satisfaire. L'ensemble $\mathscr{E}$ se résume à l'ensemble vide.

— Si le second membre $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ est nul alors l'équivalence devient :

$$M(x,y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow IM^2 = 0 \Leftrightarrow IM = 0.$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ se résume au seul point $I(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$.

— Si la quantité $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ est positive alors elle est le carré de sa racine. Donc :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow IM^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \\ \Leftrightarrow IM &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \text{ ou } IM = -\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \end{aligned}$$

Or, un la distance IM ne peut pas être négative. Ainsi, $M \in \mathscr{E}$ si et seulement si la distance entre I et M est de $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$ donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

□

Théorème 12.30.
Pour qu'une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit celle d'un cercle $\mathscr{C}$, il faut et il suffit que la quantité $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$ soit positive (ou nulle).

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre le point $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

12.2.2 Équation cartésienne et paramétrique d'une droite et de plans

Colinéarité et coplanéarité

Définition 12.31. *Colinéarité*
On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si, et seulement si, il existe deux réels α et β non tous deux nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Définition 12.32. *Coplanéarité*
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanéaires si il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Exemple 12.33.
Quatre points distincts A, B, C et D appartiennent à un même plan si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Équations de droites

◊ *Développement.* Soit $\mathscr{D}$ la droite de l'espace passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on obtient donc :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \quad \text{(si aucun des trois réels au dénominateur n'est nul).}$$

Si $\mathscr{D}$ eset donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et par un vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$, alors on peut écrire les trois égalités suivantes :

$$\begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases}.$$

Si aucun des trois réels a, b, c n'est nul, on peut écrire :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$

Il s'agit des équations de $\mathscr{D}$ lorsque cette droite n'est pas parallèle à l'un des plans de coordonnées. □

Propriété 12.34.
Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et par un vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$.

— Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\mathscr{D}$ n'est parallèle à aucun plan de coordonnées, ses équations peuvent s'écrire :
$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}.$$

— Si $a = 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ (il en est de même si $b = 0$ ou $c = 0$) alors $\mathscr{D}$ est parallèle au plan d'équation $x = 0$, ses équations peuvent s'écrire :
$$\begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c} \end{cases}.$$

— Si $a = 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$ (il en est de même si $a = 0$ et $c = 0$ ou $b = 0$ et $c = 0$) alors $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe Oz, ses équations peuvent s'écrire :
$$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \\ z = z_A + tc \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Exemple 12.35.
Donner les équations de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-3, 1, 4)$ et $B(2, 3, 1)$.

◊ *Développement.* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(5, 2, -3)$.
Les équations de $\mathscr{D}$ peuvent s'écrire :

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

ou

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6 = 5y-5 \\ 2z-8 = -3y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y+11 = 0 \\ 3y+2z-11 = 0 \end{cases}$$

□

12.2.3 Équation cartésienne d'un plan

Propriété 12.36. *Caractérisation algébrique d'un plan*
Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

— Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

— Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée *équation cartésienne* du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Démonstration. ◊

— Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par un point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

M appartenant à $(\mathscr{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

ou encore, en développant :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0 = 0.$$

Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ et $d = -\alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0$.

— a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0; y_0; z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

  — si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;

  — si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

ce qui peut aussi s'écrire : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On en déduit, d'après la propriété précédente que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

□

Exemple 12.37.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points I, J et K ont pour coordonnées respectives $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ et $(0; 0; 1)$.

— Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{\imath}$.
— Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{\jmath}$.
— Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$.

▶ **Méthode 12.38.** *Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)*

Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

▶ **Méthode 12.39.** *Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)*

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathscr{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathscr{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathscr{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Exemple 12.40.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans ce repère on considère les points $I(1; 0; 0)$, $J(0; 1; 0)$ et $K(0; 0; 1)$. Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12.2.4 Représentation paramétrique de droites et de plans

Propriété 12.41.
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right)$. $M(x; y; z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}.$$

Démonstration. ◇ $M(x; y; z) \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = t_\alpha \\ y - y_A = t\beta \\ z - z_A = t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}.$$

□

Définition 12.42.
On dit que le système d'équation :
$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$
où $t \in \mathbb{R}$ est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Propriété 12.43.
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$. $M(x; y; z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :
$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$

Démonstration. $\Diamond$ $M(x; y; z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :
$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha + t'\alpha' \\ y - y_A = t\beta + t'\beta' \\ z - z_A = t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$
□

Définition 12.44.
On dit que le système d'équations :
$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$
où $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

Remarque 12.45.
Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

12.3 Fonction, changement de repères et de coordonnées

12.3.1 Changement de repère

Exemple 12.46.
On considère la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ et on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique par rapport à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. Démontrer qu'une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $Y = 4X^3 - 3X$.

Développement. ◇ Calculons tout d'abord les coordonnées du point $A(1, f(1))$.

$$f(1) = 4 \times 1^3 - 12 \times 1^2 + 9 \times 1 = 1.$$

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de coordonnées (X, Y) dans $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$. On sait, d'après la relation de Chasles que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM},$$

on peut donc obtenir une relation entre les coordonnées de M dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et celles dans $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$$

On remplaces ensuite x et y dans $y = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ par leur valeur en fonction de X et Y :

$$\begin{aligned} & 1 + Y = 4(1+X)^3 - 12(1+X)^2 + 9(1+X) \\ & \Leftrightarrow Y = 4(1 + 3X + 6X^2 + 3X + 1) - 12(X^2 + 2X + 1) + 9 + 9X - 1 \\ & \Leftrightarrow Y = 4 + 12X + 24X^2 + 12X + 1 - 12X^2 - 24X - 12 + 9 + 9X - 1 \\ & \Leftrightarrow Y = 4X^3 - 3X. \end{aligned}$$

□

12.3.2 Système de coordonnées

Définition 12.47.
Un *système de coordonnées* est une correspondance entre chaque point d'un espace à N dimensions et un N-uplet de scalaires.

L'exemple le plus connu est les coordonnées cartésiennes que l'on a vu dans toute la leçon mais il en existe plusieurs en mathématiques.

Exemples 12.48.
1. Les **coordonnées polaires** décrivent la position d'un point $P(r, \varphi)$ du plan par sa distance r par rapport à l'origine et l'angle φ entre l'axe des abscisses et le segment $[OP]$
2. Les **coordonnées cylindriques** décrivent la position d'un point $P(\rho, \phi, z)$ de l'espace par le rayon du cylindre $\rho \geqslant 0$, la distance entre le point et l'axe des z.
3. Les **coordonnées sphériques** décrivent la position d'un point $P(r, \vartheta, \varphi)$ à l'aide de $r = OP$, ϑ l'angle entre l'axe polaire (axe des z positifs) et $[OP]$ et φ l'angle entre l'axe des x positifs et la projection de $[OP]$ sur le plan (x, y).

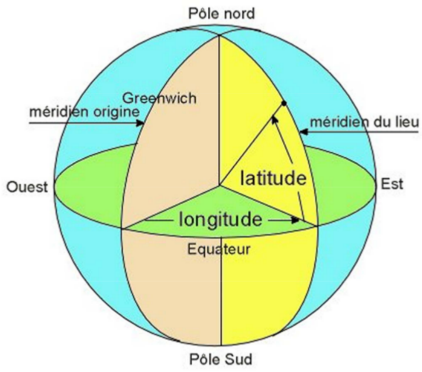
Application : calcul d'intégrales

12.4 Repérage sur une sphère

Pour repérer un point à la surface du globe terrestre, on utilise deux coordonnées géographiques : la longitude et la latitude.

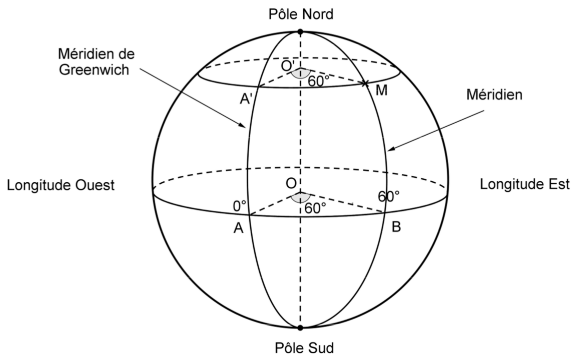
12.4.1 Longitude et méridien

Définition 12.49.
Un *méridien* est un demi-grand cercle imaginaire du globe terrestre reliant les pôles géographiques.

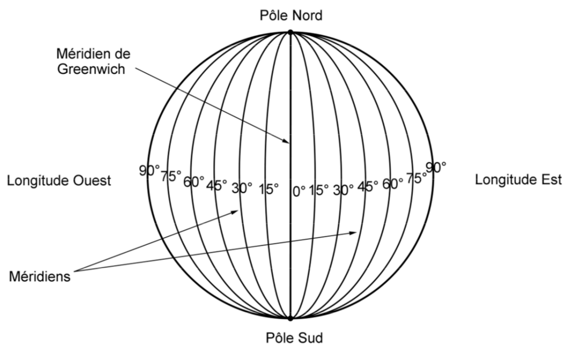


Définition 12.50.
La *longitude* est une coordonnée géographique représentée par une valeur angulaire, expression de la position Est-Ouest d'un point sur la Terre (ou sur une autre sphère.
La longitude d'origine (0°) sur la Terre est le *méridien de Greenwich* (GB).

La longitude du point M est représentée sur la figure suivante par la mesure des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'M}$ où le point O est le centre de la Terre.



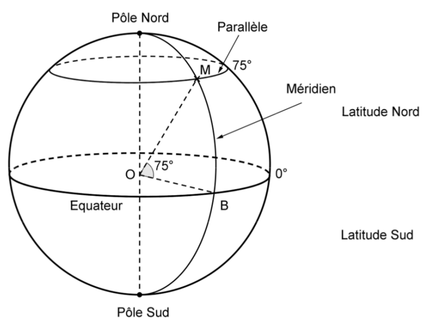
Remarque 12.51.
Tous les points de la Terre situés sur un même méridien ont la même longitude.



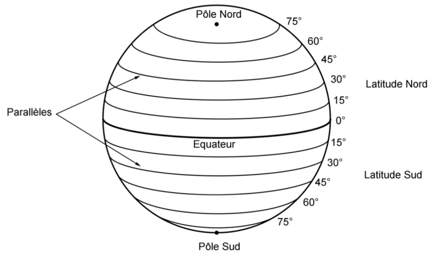
12.4.2 Latitude et parallèle

Définition 12.52.
La *latitude* est une coordonnée géographique représentée par une valeur angulaire, expression de la position d'un point sur la Terre, au nord ou au sud de l'équateur qui représente la latitude d'origine (0°).

La latitude du point M est représentée sur la figure précédente par la mesure de l'angle $\widehat{BOM}$ où le point O est le centre de la Terre.

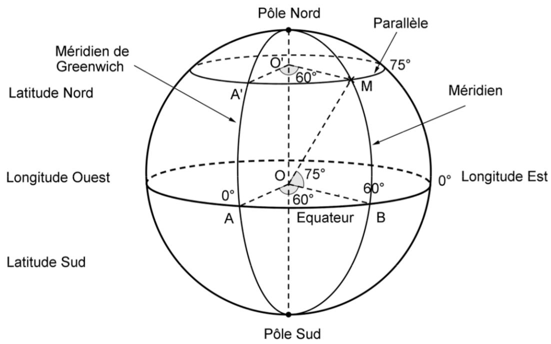


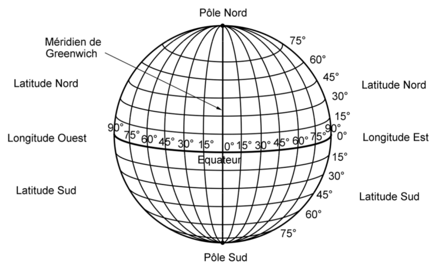
Remarque 12.53.
Tous les points de la Terre, ayant une même latitude, forment un cercle imaginaire obtenu en sectionnant la Terre par un plan parallèle à celui de l'équateur : ce cercle est appelé un parallèle.

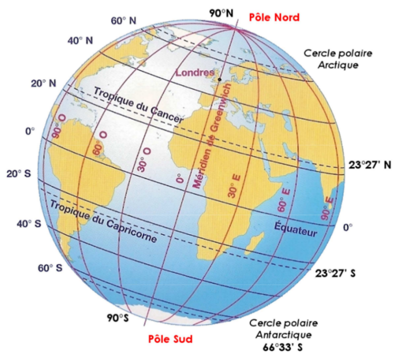


12.4.3 Repérage sur une sphère

On peut donc positionner parfaitement un point sur la surface de la Terre connaissant sa longitude et sa latitude.
Le point M se situe à l'intersection du 75e parallèle-nord ($\widehat{BOM} = 75°$) et du 60e méridien-est ($\widehat{AOB} = 60°$).

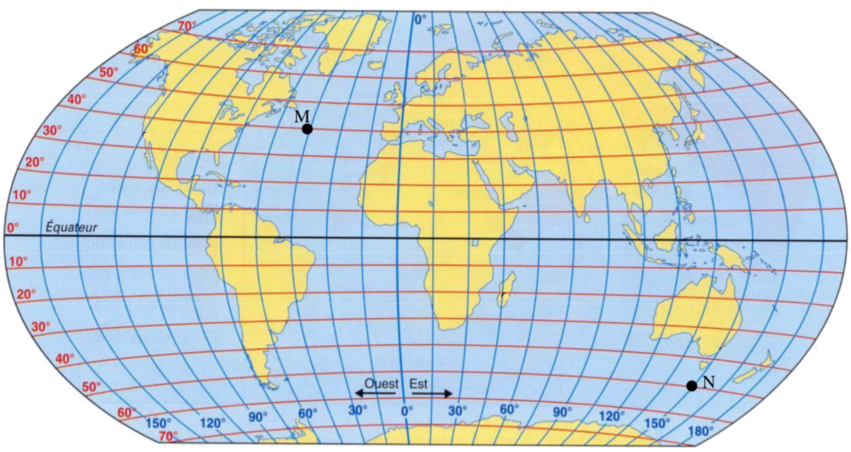






Exemple 12.54.

1. Déterminer les coordonnées géographiques des points M et N.
2. Positionner le point R de longitude : 120° Ouest et de latitude : 20° Sud.
3. Positionner le point S, intersection du 30e parallèle-nord et du 75e méridien-est.

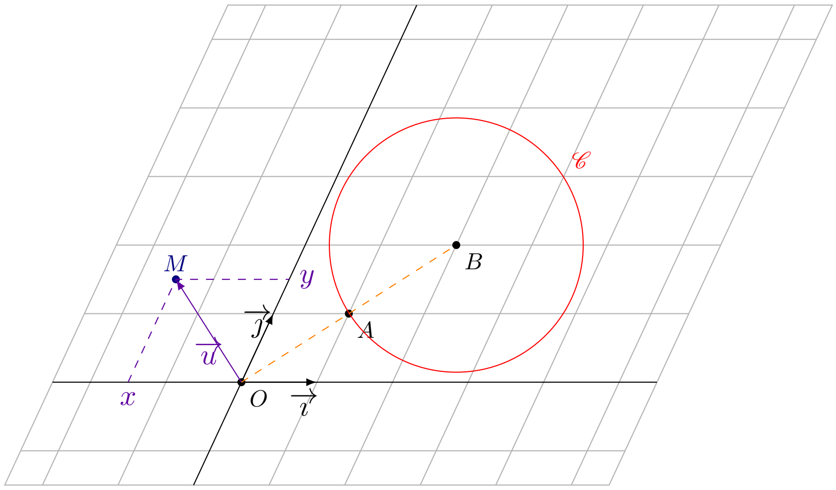


12.5 Et sans repère orthonormé...

◊

Que se passe-t-il pour les équations cartésiennes de droite et de cercle si le repère n'est pas orthonormé ?

On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ non orthonormé dont la norme du vecteur $\vec{\imath}$ est 7 et celle du vecteur $\vec{\jmath}$ est de 5. La distance OA est égale à $\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.



12.5.1 Norme de vecteurs

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\binom{x}{y}$, on a alors : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On développe le carré scalaire :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 &= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = \langle (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}), (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})\rangle \\ &= \|x\vec{\imath}\|^2 + 2\,\langle x\vec{\imath}, y\vec{\jmath}\rangle + \|y\vec{\jmath}\|^2 = x^2\,\|\vec{\imath}\|^2 + 2xy\,\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + y^2\,\|\vec{\jmath}\|^2 .\end{aligned}$$

Calculons $\|\vec{\imath}\|^2 = 7^2 = 49$, $\|\vec{\jmath}\|^2 = 5^2 = 25$ et :

$$\begin{aligned}\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{\imath} + \vec{\jmath}\|^2 - \|\vec{\imath}\|^2 - \|\vec{\jmath}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}[\sqrt{116}^2 - 7^2 - 5^2] = \frac{1}{2}[116 - 49 - 25] = \frac{1}{2} \times 42 = 21.\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\|\vec{u}\|^2 = 49x^2 + 42xy + 25y^2$$

et en prenant la racine carrée :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{49x^2 + 42xy + 25y^2}.$$

La distance AB peut être calculé grâce au résultat précédent. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour coordonnées $(1, 1)$, on peut écrire :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{49 \times 1^2 + 42 \times 1 + 1 + 25 \times 1} = \sqrt{49 + 42 + 25} = \sqrt{116}.$$

12.5.2 Équation du cercle $\mathscr{C}$

On cherche une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $B(2; 2)$ et passant par $A(1; 1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si la distance BM est égale à AB.

$$\begin{aligned}M(x, y) \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \sqrt{49(x-2)^2 + 42(x-2)(y-2) + 25(y-2)^2} = \sqrt{116} \\ &\Leftrightarrow 49(x-2)^2 + 42(x-2)(y-2) + 25(y-2)^2 = 116 \\ &\Leftrightarrow 49[x^2 - 4x + 4] + 42[xy - 2x - 2y + 4] + 25[y^2 - 4y + 4] = 116 \\ &\Leftrightarrow 49x^2 - 196x + 196 + 42xy - 84x - 84y + 168 + 25y^2 - 100y + 100 = 116 \\ &\Leftrightarrow 49x^2 + 25y^2 + 42xy - 280x - 184y + 348 = 0.\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ est :

$$49x^2 + 25y^2 + 42xy - 280x - 184y + 348 = 0.$$

On place le point D de coordonnées $(3;3)$. Vérifions qu'il appartient au cercle $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned}&49x_D^2 + 25y_D^2 + 42x_D y_D - 280x_D - 184y_D + 348\\ &= 49 \times 3^2 + 25 \times 3^2 + 42 \times 3 \times 3 - 280 \times 3 - 184 \times 3 + 348\\ &= 441 + 225 + 378 - 840 - 552 + 348 = 1392 - 1392 = 0.\end{aligned}$$

12.5.3 Produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a donc les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}.$$

On peut ainsi calculer le produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}), (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \rangle = 49xx' + 21xy' + 21x'y + 25yy'.$$

12.5.4 Conclusion finale

Théorème 12.55.
Soit un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ quelconque. Notons :

$$a = \|\vec{\imath}\|^2, \quad b = \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle \quad \text{et} \quad c = \|\vec{\jmath}\|^2.$$

1. L'expression de la norme du vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

2. L'expression du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = axx' + b(xy' + yx') + cyy'.$$

3. Toute équation cartésienne d'un cercle est de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots x + \dots y + \dots = 0.$$

On retrouve les résultats précédents pour des repères orthonormés. En effet, quand un repère est orthonormé, $a = c = 1$ et $b = 0$.

LEÇON

13

Droites et plans dans l'espace.

Préambule

Niveau : collège, terminale « Mathématiques Scientifique »

Prérequis : droites dans le plan, résolution de systèmes linéaires, vecteurs, équations cartésiennes, équations paramétrique. Thalès dans le plan et position relatives de deux droites dans le plan

Références :

[1] S. Mehl, *Droites du plan, étude analytique élémentaire.* [url].

[2] C. Parfenoff, *Droites parallèles. Droites sécantes.* Seconde. [url].

[3] D. Perrin, *Droites du plan.* [url] .

[4] M. Hamed, *Leçon 24 : Droites du plan.*

[5] P. Lux, *Droites et plans dans l'espace.* [url].

[6] J.-L. Rouget, *Droites et plans de l'espace.* [url].

[7] C. Rossignol, *Droites et plans de l'espace.* [url].

13.1 Généralités sur les droites

13.1.1 Caractérisation d'une droite

Définition 13.1.
Soit $A \in \mathscr{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble :

$$\mathscr{D}(A, \vec{u}) = \left\{ M \in \mathscr{P} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \right\}$$

est appelé *droite* passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

13.1.2 Droites confondues

Proposition 13.2.
Soit $\mathscr{D}(A, \vec{u}$ une droite du plan, $B \in \mathscr{P}$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul.
$\mathscr{D}(A, \vec{u}) = \mathscr{D}(B, \vec{v})$ si et seulement si $B \in D(A\vec{u})$ et $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$.

Conséquence 13.3.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\mathscr{D}(A', \vec{v})$ sont sécantes en un unique point.

13.2 Droites et plans de l'espace

Pour travailler dans l'espace (ou la troisième dimension), il est nécessaire de se fixer quelques axiomes.

Axiome 13.4.
Par deux points distincts passe une seule droite. Deux points distincts déterminent une droite.

Définition 13.5. *Points alignés*
On dit que des points sont *alignés* s'ils appartiennent à la même droite.

Axiome 13.6.
Par trois points non alignés passe un seul plan.

Définition 13.7. *Points coplanaires*
Si plusieurs points de l'espace appartiennent à un même plan, on dit qu'ils sont coplanaires.

Axiome 13.8.
Si A et B sont deux points du plan $\mathscr{P}$ alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Axiome 13.9.
Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

Définition 13.10. *Intersection de deux plans*
Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite.

Axiome 13.11.
Tous les résultats de la géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Remarque 13.12.
Un plan peut être défini par :

- un point et une droite ne passant par ce point,
- deux droites sécantes,

13.2.1 Droites et plans

Définition 13.13. *Droite*
On appelle $\mathscr{D}$, une droite, toute partie de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe un point A et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant :

$$\mathscr{D} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\right\}.$$

On note alors $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$.

Définition 13.14. *Plan*
On appelle $\mathscr{P}$, un plan, toute partie de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe un point A et deux vecteurs non nuls linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant :

$$\mathscr{P} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right\}.$$

On note alors $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés *vecteurs directeurs* de $\mathscr{P}$.

Remarques 13.15.

1. Une droite est parfaitement définie par la donnée de deux points non alignés. Il s'agit de l'ensemble des barycentres possibles de ces points.
2. Un plan est parfaitement définie par la donnée de trois points non alignés. Il s'agit de l'ensemble des barycentres possibles de ces points.

Proposition 13.16.
Soit $\mathscr{P}$ un plan. Il existe un point A et un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ vérifiant :

$$\mathscr{P} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\}.$$

On dit alors que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* au plan $\mathscr{P}$.

Démonstration. ◊ Considérons $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Prenons $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Procédons par double inclusion :

— Si $M \in \mathscr{P}$ alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

— D'autre part $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ alors $\overrightarrow{AM}$ est engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc $M \in \mathscr{P}$.

□

Soit $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ une droite et $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(a, b, c)$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Alors :

$$M(x, y, z) \in \mathscr{D}(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a + k\alpha \\ y = b + k\beta \\ z = c + k\gamma \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = b + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = c + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

Ces systèmes sont appelés représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$).

Théorème 13.17.
Soit $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Il existe $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ tel que :

$$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0.$$

Réciproquement, si $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble

$$\left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid px + qy + rz + s = 0\right\}$$

est un plan de vecteur normal $\vec{n}(p, q, r)$.

Démonstration. ◊ Soit $\mathscr{P}(A, \vec{n})$ un plan avec $\vec{n}(p, q, r)$ et $A(a, b, c)$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)p + (y - b)q + (z - c)r = 0 \end{aligned}$$

En posant $s = -pa - qb - rc$, nous avons donc l'implication.

Réciproquement, on montre facilement que l'ensemble

$$\mathscr{E} = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid px + qy + rz + s = 0\right\}$$

est non vide (si $r \neq 0$, il contient $\left(0, 0, \frac{s}{r}\right)$).

Soit $A(a,b,c) \in \mathscr{E}$, alors $s = -ap - bq - cr$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0 \\ &\Leftrightarrow px + qy + rz + (-ap - bq - cr) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)p + (y-b)q + (z-c)r = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathscr{P}(A, \vec{n}) \end{aligned}$$

où $\vec{n}(p,q,r)$ est un vecteur normal au plan. Donc $\mathscr{E}$ définit bien un plan. □

Définition 13.18.
L'équation $px + qy + rz + s = 0$ est appelée *équation cartésienne* de $\mathscr{P}$.

13.2.2 Positions relatives

Théorème 13.19.
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans, de vecteur normal respectif $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

1. Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont soit strictement parallèles, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun point en commun, soit confondus.
2. Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les deux plans sont sécants et l'intersection est une droite de vecteur directeur un vecteur normal à $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

Démonstration. ◊ Posons $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n}'(a,b,c)$. Supposons $\vec{n}' = k\vec{n}$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{P}' &\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z = d' = 0 \\ &\Leftrightarrow kax + kby + kcz + d' = 0 \\ kd + d' = 0 & \end{aligned}$$

Ainsi, si $d' = kd$, on a bien $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$. Sinon $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$.

Supposons $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. On peut aussi supposer sans perte de généralités, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathscr{P}' &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & (2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (1) \\ \underbrace{(a'b - ab')}_{\alpha} y + \underbrace{(a'c - ac')}_{\beta} z + \underbrace{(ad - ad')}_{\gamma} = 0 & (3) \leftarrow a'(1) - a(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $\vec{n}'$ et $\vec{n}$ sont non colinéaires, on peut supposer sans perte de généralités, $\alpha \neq 0$, on obtient alors :

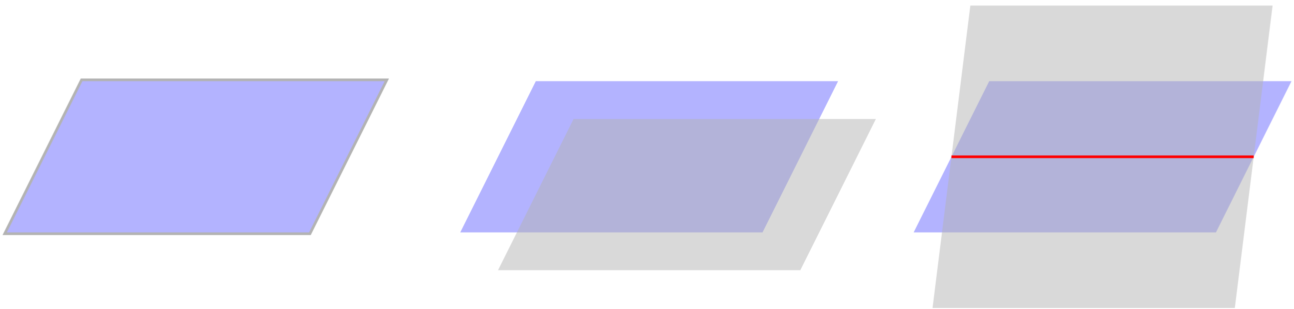
$$\begin{cases} x = \dfrac{b\beta - c\alpha}{a\alpha} z + \dfrac{b\gamma - d\alpha}{a\alpha} \\ y = -\dfrac{\beta}{\alpha} z - \dfrac{\gamma}{\alpha} \\ z = z \end{cases}$$

Ce qui bien l'équation d'une droite. □

Toute droite peut donc être vue comme l'intersection de deux plans, c'est-à-dire comme l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant :

$$\begin{cases} px+qy+rz+s=0 \\ p'x+q'y+r'z+s'=0 \end{cases}$$

où (p,q,r) et (p',r',q') ne sont pas proportionnels. On appelle ce système *équation cartésienne* de la droite.



Définition 13.20.
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est dans la direction de $\mathscr{P}$ (il peut être engendré par les vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$).

Proposition 13.21.
Si $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ alors soit $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}$ soit $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}=\varnothing$. Sinon, l'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$ est un point.

Démonstration. ♢
Soit $\mathscr{P}(A,\vec{u})\cap\mathscr{D}(B,\vec{n})=\varnothing$, soit il existe au moins un point en commun disons I. Puisque le vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathscr{D}$ est dans la direction de $\mathscr{P}$ alors :

$$M(x,y,z)\in\mathscr{D}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\lambda\vec{u}\Rightarrow M(x,y,z)\in\mathscr{P}.$$

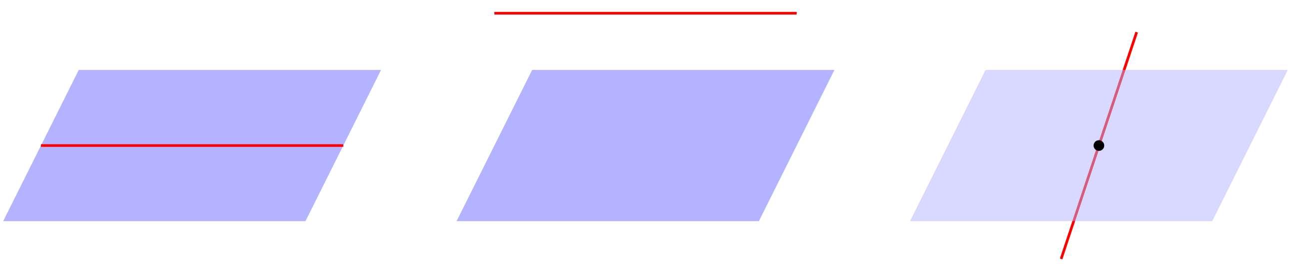
Ce qui montre le premier point.
Si la droite et le plan ne sont pas parallèles, alors prenons M un point $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{n}. \end{aligned}$$

Puisque $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$, on a :

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{\vec{u}\cdot\vec{n}},$$

ce qui définit bien un unique point M. □



Définition 13.22.
Deux droites sont dites *coplanaires* s'il existe un plan $\mathscr{P}$ les contenant toutes les deux.

Définition 13.23.
Deux droites sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

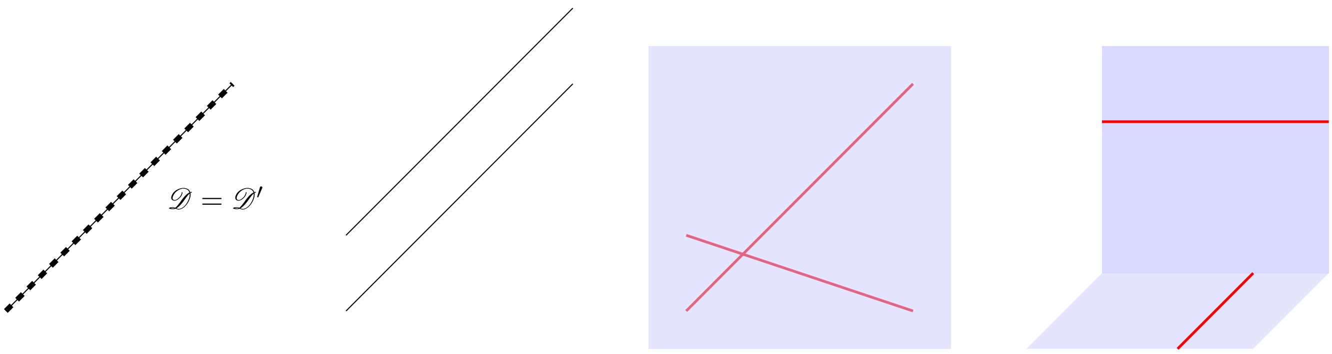
Proposition 13.24.
Deux droites parallèles ou sécantes sont toujours coplanaires.

Démonstration. ♢
Soit $\mathscr{D}(A, \vec{u})$ et $\mathscr{D}'(A', \vec{u}')$.

— Si les droites sont parallèles, il suffit de prendre le plan $\mathscr{P}(A, \vec{u}, \overrightarrow{AA'})$.
— Si les droites sont sécantes, en notant I le point d'intersection, il suffit de prendre $\mathscr{P}(I, \vec{u}, \vec{u}')$.

□

Remarque 13.25.
Deux droites peuvent donc ne pas avoir de points d'intersection sans être pour autant parallèles.

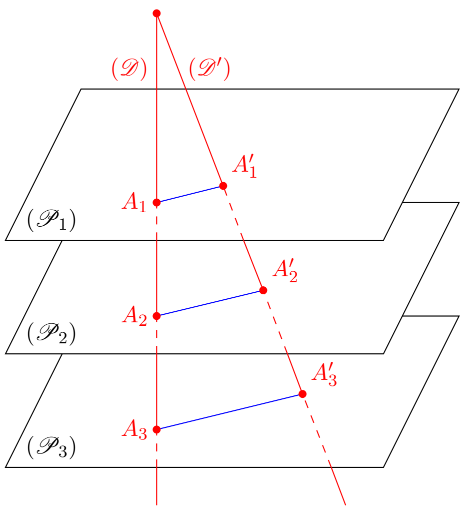


13.3 Applications

13.3.1 Théorème de Thalès

Théorème 13.26. *Théorème de Thalès*
Soient $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ trois plans strictement parallèles de l'espace, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles aux plans $\mathscr{P}_i$. Posons $A_i = \mathscr{P}_i \cap \mathscr{D}$ et $A'_i = \mathscr{P}_i \cap \mathscr{D}'$ alors on a :

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A'_1A'_3}}{\overline{A'_1A'_2}}.$$



Démonstration. ♢ Si $\mathscr{D}(A_1, \vec{u})$ et $\mathscr{D}'(A_1', \vec{u}')$ sont coplanaires, on a l'égalité par le théorème de Thalès dans le plan.

Si $\mathscr{D}(A_1, \vec{u})$ et $\mathscr{D}'(A_1', \vec{u})$ ne sont pas coplanaires, on considère $\mathscr{D}''(A_1', \vec{u})$ et on pose $A_i'' = \mathscr{P}_i \cap \mathscr{D}''$. $A_1' \in \mathscr{D}' \cap \mathscr{D}''$ donc $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont coplanaires.

$$\frac{\overline{A_1' A_3}}{\overline{A_1' A_2'}} = \frac{\overline{A_1'' A_3''}}{\overline{A_1'' A_2''}}.$$

Puisque $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour vecteur directeur $\vec{u}$, elles sont parallèles et donc coplanaires elles aussi. D'après le théorème de Thalès dans le plan, on a là aussi :

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1' A_2'}} = \frac{\overline{A_1'' A_3''}}{\overline{A_1 A_2}}.$$

Ce qui donne bien :

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\overline{A_1' A_3'}}{\overline{A_1' A_2'}}.$$

□

13.3.2 Application du théorème des trois perpendiculaires

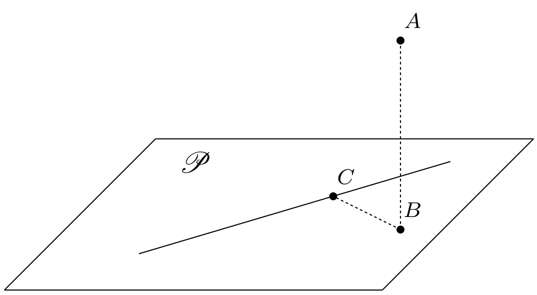
Théorème 13.27.
Soit $\mathscr{D}$ une droite contenue dans un plan $\mathscr{P}$ et A un point extérieur à $\mathscr{P}$. On appelle B le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ et C le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$. Alors (AC) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Démonstration. ♢ Par hypothèse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{car } \vec{u} \text{ est dans la direction de } \mathscr{P}. \end{cases}$$

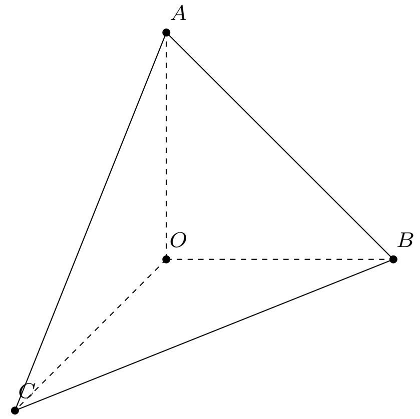
Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u} = 0$.

Les droites sont donc orthogonales. Comme C appartient à (AC) et à $\mathscr{D}$ alors elles sont perpendiculaires. □



Proposition 13.28. *Résultat de Descartes*
Soit $(OABC)$ une pyramide rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Alors :

$$\mathscr{A}_{ABC}^2 = \mathscr{A}_{OAB}^2 + \mathscr{A}_{OBC}^2 + \mathscr{A}_{OCA}^2.$$



Démonstration. ♢

D'après le théorème des trois perpendiculaires, A et O ont le même projeté sur (BC), disons I. On utilise alors le théorème de Pythagore dans les triangles AOI et OBC, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{ABC}^2 - \mathscr{A}_{OBC}^2 &= \frac{1}{4}(IA^2 \times CB^2 - IO^2 \times BC^2) \\ &= \frac{1}{4} \times CB^2 \times (IA^2 - IO^2) \\ &= \frac{1}{4} \times CB^2 \times AO^2 \\ &= \frac{1}{4}(CO^2 + OB^2) \times AO^2 \\ &= \mathscr{A}_{AOC}^2 + \mathscr{A}_{AOB}^2.\end{aligned}$$

□

13.3.3 Distance d'un point à un plan

Définition 13.29. *Distance d'un point à un plan*

Soient $\mathscr{P}$ un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan $\mathscr{P}$ est la distance de M_0 au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$. Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de $\mathscr{P}$.

Proposition 13.30.

Si dans un repère orthogonal le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (l'un des trois réels a, b et c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) alors la distance de M_0 à $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$d(M_0, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration. ♢ On a vu que l'équation cartésienne d'un plan relativement à un repère orthonormé est de la forme :

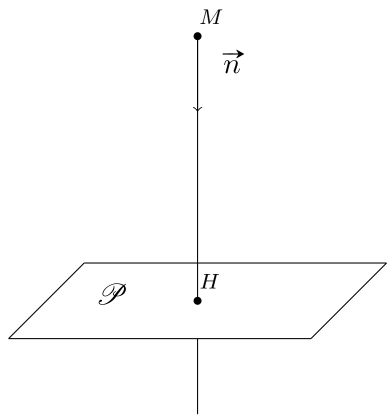
$$ax + by + cz + k = 0$$

où a, b et c sont les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.

Soit donc $\mathscr{P}$ un plan d'équation

$$\mathscr{P} : ax + by + cz + k = 0$$

M de coordonnées (α, β, γ) un point quelconque de l'espace (situé ou non dans le plan $\mathscr{P}$). La droite passant par M et orthogonale à $\mathscr{P}$ coupe $\mathscr{P}$ en H de coordonnées (x_H, y_H, z_H) et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$ de coordonnées a, b et c.



Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ lui aussi orthogonal à $\mathscr{P}$ a donc pour coordonnées $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. La distance du point M au plan $\mathscr{P}$ est donc :

$$MH = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il faut donc déterminer λ. Puisque H appartient au plan $\mathscr{P}$, on a :

$$ax_H + by_H + cz_H + k = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $(x_H - \alpha, y_H - \beta, z_H - \gamma)$ qui sont égales à $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. Donc :

$$x_H = \lambda a + \alpha, \quad y_H = \lambda b + \beta, \quad z_H = \lambda c + \gamma.$$

En remplaçant dans l'équation $ax_H + by_H + cz_H + k = 0$, on obtient :

$$a(\lambda a + \alpha) + b(\lambda b + \beta) + c(\lambda c + \gamma) + k = 0.$$

D'où :

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + (a\alpha + b\beta + c\gamma + k) = 0,$$

et donc :

$$\lambda = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + k}{a^2 + b^2 + c},$$

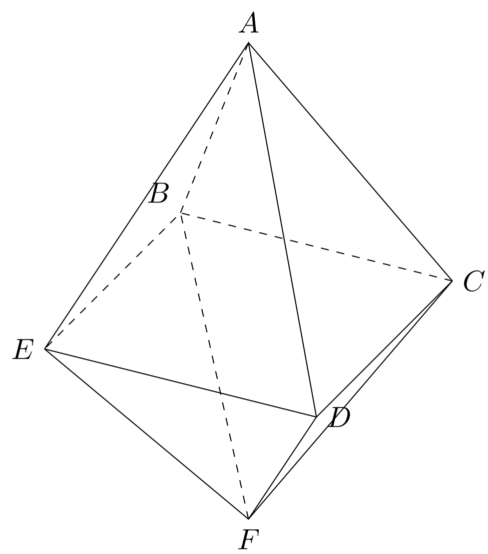
le dénominateur n'étant pas nul puisque $\vec{n}$ ne l'est pas. Donc :

$$MH = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

13.3.4 Distance entre deux plans opposés dans un octaèdre

▶ **Exercice 13.31.**
Soit $ABCDEF$ un octaèdre dessiné ci-contre :
Déterminer la distance entre les plans (ABE) et (FDC).



LEÇON

14

Transformations du plan. Frises et pavages.

Préambule

Niveau : troisième, seconde, première « Mathématiques Scientifique » et terminale STD2A

Prérequis : géométrie vectorielle, barycentres

Références :

[1] Unknown, *Chapitre 10 : Transformations du plan et de l'espace*. Lycée Jean Rostand, Mantes, 1ère S SVT, Année 2007-2008. [url]

[2] D. Frin, *Transformations du plan*. Cours Seconde. [url]

[3] M. Bourgogne, *Chapitre 01 : construction et transformation de figures*. Collège St Pierre Chanel de Thionville, Quatrième. [url]

[4] C. Boulonne, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2011. [url]

[5] X. Delahaye, *Homothéties, translation, rotations*. Première S. [url]

[6] S. Delaunay, *M302 : Cours de Géométrie I*, 2009-2010.

[7] G. Bontemps, *Fractales, Maths, 1ère S*. Bordas, Programme 2001.

[8] A. Liétard, *Isométries planes*. [url]

[9] X. Delahaye, *Similitude*. Terminale S Spé. [url]

[10] A. Luce & O. Deckmyn, *Similitudes planes*. Terminale S. [url]

[11] A. Liétard, *Similitudes*. Terminale S. [url]

[12] KB, *Homothéties*. [url]

[13] N. Even & al, *Pavages du plan avec des polygones convexes*. [url]

14.1 Transformations

14.1.1 Définition

Définition 14.1.
On appelle *transformation du plan* (ou de l'espace) toute fonction bijective du plan (ou de l'espace), c'est-à-dire que tout point du plan (ou de l'espace) possède *un et un seul* antécédent par cette fonction.

Remarque 14.2.
Une projection sur une droite du plan n'est pas une transformation du plan.

Définition 14.3. *Point fixe*
On dit que M est un *point fixe* (ou invariant) par la transformation f si $f(M) = M$.

Définition 14.4. *Image*
Si F est une figure du plan (un ensemble de points quelconques), on appelle image de F par f et on note $f(F)$ l'ensemble des points de la forme $f(M)$ lorsque M décrit F. Si $f(F) = F$, on dit que F est *globalement invariante* par f.

Définition 14.5. *Transformation identique*
La transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la *transformation identique* ou l'*identité* et se note id.

Définition 14.6. *Transformation composée*
La *transformation composée* de f et de g, notée $f \circ g$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point :

$$(f \circ g)(M) = f(g(M)).$$

Définition 14.7. *Transformation réciproque*
La réciproque f^{-1} d'une transformation f est la transformation qui, à tout point N associe son unique antécédent par f.

$$f^{-1}(M) = N \Leftrightarrow M = f(N).$$

f^{-1} est une transformation et $(f^{-1})^{-1} = f$,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Théorème 14.8.
Si f et g sont deux transformations, $f \circ g$ est une transformation et :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

14.1.2 Isométries

Définition 14.9. *Isométrie*
Une isométrie du plan est une transformation du plan qui conserve les distances. Précisément, pour tous points A et B d'images respectives A' et B' : $A'B' = AB$.

Théorème 14.10.
Si f est une isométrie du plan :

- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$;
- l'image d'une droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$;
- l'image du cercle de centre Ω et de raon R est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon R ;
- f conserve le parallélisme ;
- f conserve l'orthogonalité ;
- f conserve les milieux ;
- f conserve les barycentres ;
- f conserve les angles géométriques.

Définition 14.11. *Déplacements et antidéplacements*

- Une isométrie qui conserve l'orientation des angles est un *déplacement*.
- Une isométrie qui inverse l'orientation des angles est un antidéplacment.

Théorème 14.12.

- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement (peu importe l'ordre) est un antidéplacement.

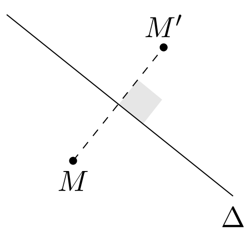
14.2 Symétries

14.2.1 Symétrie axiale

Définition 14.13.
Soit Δ une droite du plan. On appelle *réflexion* (ou *symétrie* d'axe Δ la transformation notée s_Δ définie par :

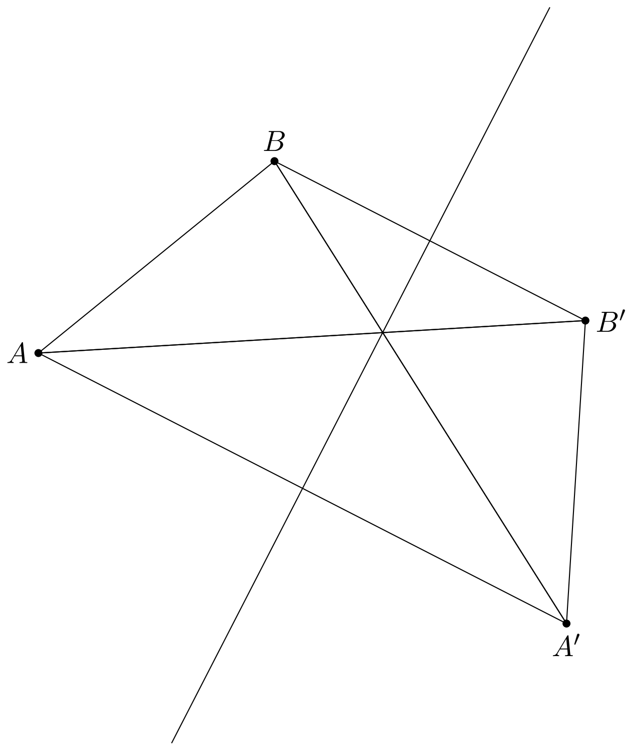
$$M' = s_\Delta(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' = M \text{ si } M \in \Delta \\ \text{ou} \\ \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] \end{cases}$$

Exemple 14.14.



Propriétés 14.15.

- Les points de la droite Δ, axe de la symétrie, sont les points invariants de s_Δ.
- Si $s_\Delta(M) = M'$ alors $s_\Delta(M') = M$.
- Si $s_\Delta(A) = A'$ et $s_\Delta(B) = B'$ alors les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en un point de la droite Δ. De plus, les droites (AA') et (BB') sont parallèles et $A'B' = AB$, c'est-à-dire que $ABB'A'$ est un trapèze isocèle. Ce qui signifie que la réflexion conserve les distances.
- L'image d'une droite (d) est une droite (d') ; si (d) est parallèle à Δ, alors (d') leur est parallèle ; si (d) est perpendiculaire à Δ, alors $(d') = (d)$.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon ; si les deux cercles se coupent, alors les points d'intersection sont sur l'axe Δ.
- L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la réflexion conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



Propriétés 14.16. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

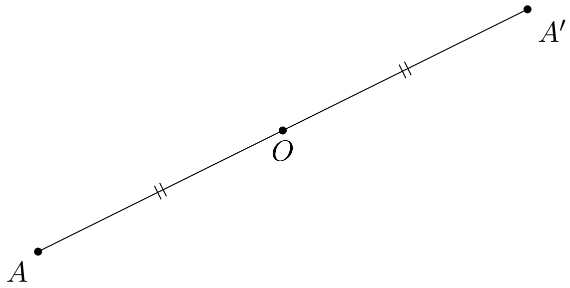
Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

14.2.2 Symétrie centrale

Définition 14.17.
Soit O un point. On dit que A' est le symétrique d'un point A distinct de O si O est le milieu du segment $[AA']$.

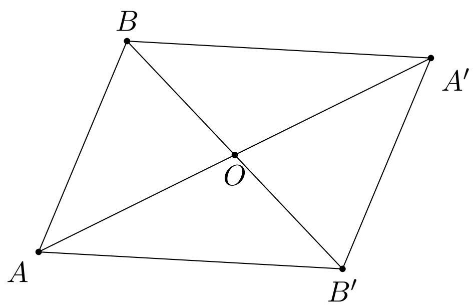
Remarque 14.18.
Le symétrique du point O est lui-même.



On a alors : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$.

Propriétés 14.19.
Si on note s_O la symétrie de centre O.

- Le point O (centre de symétrie) est l'unique point invariant.
- si $s_O(M) = M'$ alors $s_O(M') = M$.
- si $s_O(A) = A'$ et $s_O(B) = B'$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que $ABA'B'$ est un parallélogramme de centre O. Ainsi, $A'B' = AB$ et $(A'B') \parallel (AB)$; ce qui signifie que la symétrie centrale conserve les distances.
- L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d) ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
- L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



Propriétés 14.20. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

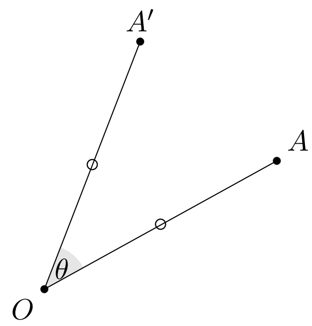
Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

14.3 Rotations

Définition 14.21.

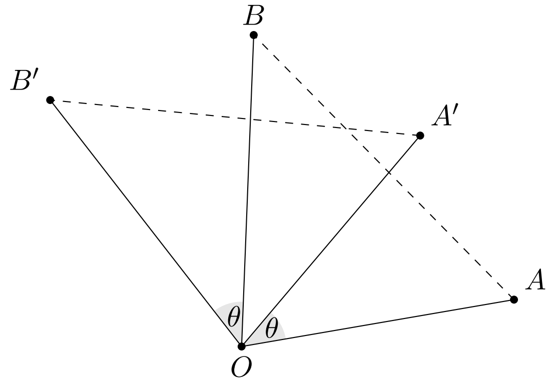
On considère un point O et un nombre réel θ. La rotation de centre O et d'angle θ est la transformation du plan qui à tout point M associe M' tel que $AM' = AM$ et $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \theta \pmod{2\pi}$.

On note $r_{O;\theta}$ la rotation de centre O et d'angle θ.



Propriétés 14.22.

1. Le point O, centre de la rotation, est l'unique point invariant.
2. Si $r_{O;\theta}(A) = A'$ et $r_{O;\theta}(B) = B'$ alors $AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \theta$; ce qui signifie que la rotation conserve les distances.
3. L'image d'une droite (d) est d'une droite (d') telle que l'angle formée entre les deux droites égale θ ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
4. L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
5. $r_{O;\pi} = s_O$.



Propriétés 14.23. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

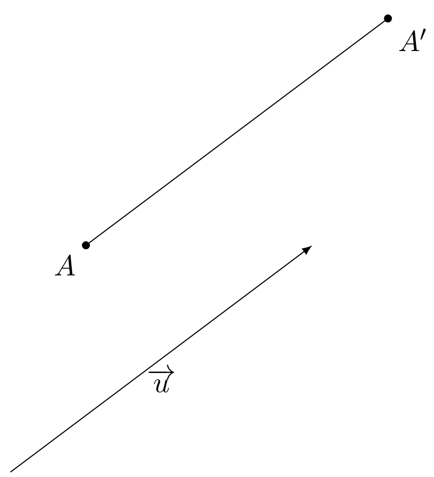
Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

14.4 Translations-homothéties

14.4.1 Translations

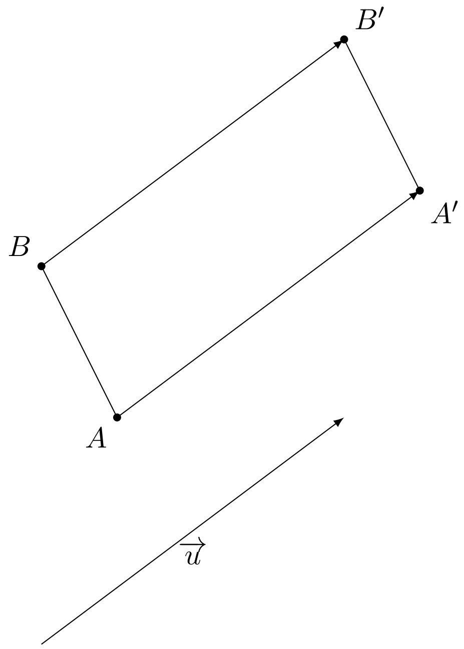
Définition 14.24.

On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Propriétés 14.25.
Si on note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$:

- si le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul, il y a aucun point invariant par $t_{\overrightarrow{u}}$. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, tous les points sont invariants par $t_{\overrightarrow{u}}$.
- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{u}$; c'est-à-dire que M est l'image de M' par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
- Si $t_{\overrightarrow{u}}(A) = A'$ et $t_{\overrightarrow{u}}(B) = B'$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que $ABB'A'$ est un parallélogramme. Ainsi $A'B' = AB$ et $(A'B') \parallel (AB)$; ce qui signifie que la translation conserve les distances.
- L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d) ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
- L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui siginifie que la translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.



Propriétés 14.26. *Propriétés communes de conservation*

Alignement L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre. L'image d'une droite est une droite.

Distances L'image d'un segment est un segment de même longueur. L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.

Parallélisme Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Orthogonalité Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

Centre de gravité L'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image.

Aires L'image d'un triangle est un triangle de même aire.

Angles L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

14.4.2 Symétrie glissée

Définition 14.27.
Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur d'une droite Δ dans le plan. La symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la composée d'une réflexion d'axe Δ et d'une translation de vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

14.4.3 Homothéties

Définition

Définition 14.28.
Soit O un point, k un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre O et de rapport k, la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Remarque 14.29.
Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k, les énoncés suivants sont équivalents :

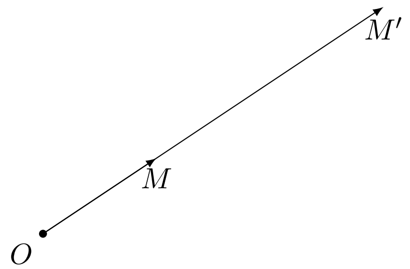
— M' est l'image de M par h ;

— $M' = h(M)$;

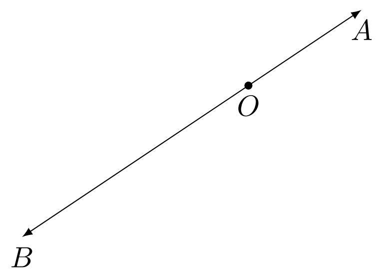
— $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemples 14.30.

— Le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, en effet $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$.



— Le point C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -2, en effet $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.



Le point B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$, en effet $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Conséquences 14.31.

— Les points O, M et M' sont alignés (les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires) et $OM' = |k|\,OM$.

— Le point O est sa propre image, on dit qu'il est invariant.

— Si A, B et C sont trois points alignés, A étant distinct de B et C, alors il existe une unique homothétie de centre A qui transforme B en C.

— Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport -1.

— Une homothétie de rapport 1 laisse les points invariants.

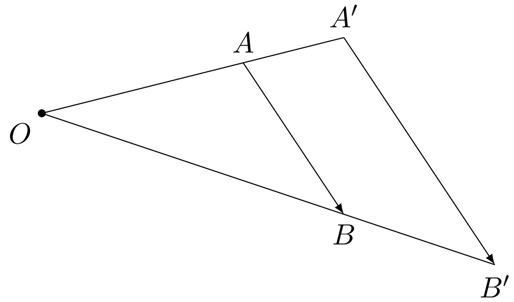
Propriétés

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Propriété 14.32.
Soient A et B deux points quelconques. Si $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. ◇ Comme $A' = h(A)$, on a $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et comme $B' = h(B)$, on a : $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Alors :

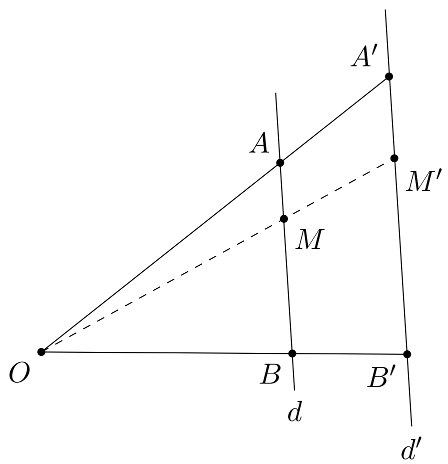
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{AB}.$$



□

Propriété 14.33. *Image d'une droite*
Une homothétie transforme une droite d en une droite d' parallèle à d. Si la droite d passe par le centre de l'homothétie, alors $d' = d$.

Démonstration. ◇ Soient A et B deux points de d et A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O et de rapport k.



Comme $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, la droite d' passant par A' et B' est parallèle à d.

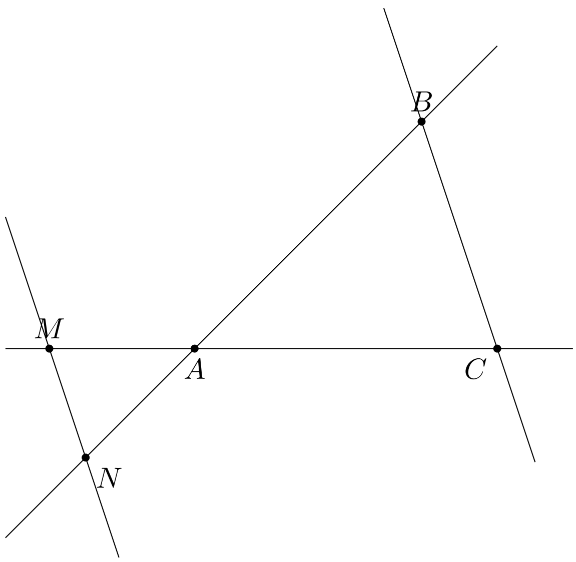
Soit M un point de d. Montrons que $M' = h(M)$ est sur d'. Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$. D'autre part, $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$. Donc :

$$A'M' = kx\overrightarrow{AB} = xk\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{A'B'}.$$

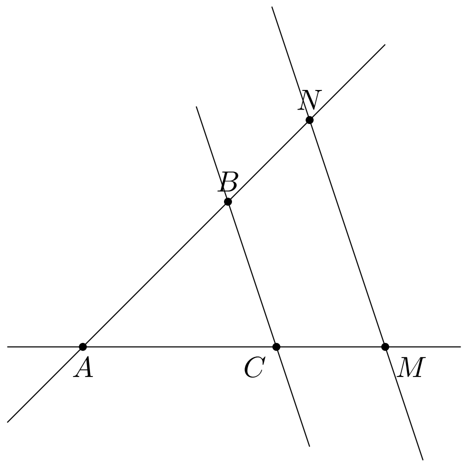
Cela montre que A', B' et M' sont alignés donc M' est sur d'. En prenant x dans $[0;1]$, cela montre aussi que le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$. □

Propriété 14.34. *Triangles semblables*
Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC). Si (MN) est parallèle à (BC), alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

1.



2.



Démonstration. ◊ Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M. Le point C se trouve à l'intersection des droites (AC) et (BC). Son image par h sera donc à l'intersection des images de (AC) et (BC).

L'image de (AC) est (AC) (droite passant par le centre de l'homothétie). L'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) passant par M image de B, c'est donc la droite (MN).

L'image de C par h est donc l'intersection des droites (AC) et (MN), c'est le point N. □

Propriété 14.35. *Image d'un cercle*
Une homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre I et de rayon R en son cercle de centre I' et de rayon R' avec $I' = h(I)$ et $R' = |k|\, R$.

Effets de l'homothétie

Propriété 14.36. *Distances, aires et volumes*
Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Propriété 14.37. *Conservation de l'alignement*
Si A, B et C sont trois points alignés, leurs images A', B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

Propriété 14.38. *Conservation du parallélisme*
Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, leurs images d'_1 et d'_2 par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

Propriété 14.39. *Conservation du barycentre*
Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β), et si G', A' et B' sont les images respectives de G, A et B par une homothétie, alors G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).

En particulier, les homothéties conservent les milieux.

Propriété 14.40. *Conservation des angles orientés*
Dans le plan orienté, si A, B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

14.4.4 Groupe des homothéties et des translations (niveau Licence)

◊
On se place dans un plan affine $\mathscr{E}$ dirigé par un espace vectoriel E.

Définition 14.41.
Une application affine h de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est appelée *homothétie*, s'il existe $A \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que pour tout vecteur $v \in E$, on ait :

$$h(A + v) = A + \lambda v.$$

C'est l'application qui à un point M associe N tel que $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AM}$. L'application linéaire associée à h est l'homothétie vectorielle $\varphi = \lambda \operatorname{id}_E$, l'homothétie h admet un unique point fixe A apelé *centre*, le scalaire λ est appelé *rapport* de h.

Si A, B, C sont trois points alignés de $\mathscr{E}$ alors il existe une unique homothétie h telle que :

$$h(A) = A \quad \text{et} \quad h(B) = C.$$

Proposition 14.42.
Soient $A \neq A'$, $B \neq B'$ des points de $\mathscr{E}$ tels que les droites $\mathscr{D} = (AB)$ et $\mathscr{D}' = (A'B')$ soient distincts et parallèles, alors

1. si $(AA') \parallel (BB')$, on a $B' = t_{\overrightarrow{AA'}}(B)$,
2. si $(AA') \cap (BB') = \{O\}$, on a $B' = h_{(O,\lambda)}(B)$ où $h_{(O,\lambda)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport λ tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$.

Démonstration.
1. On a $(AB) \parallel (A'B')$ et $(AA') \parallel (BB')$, d'où l'existence de deux scalaires α et β tels que $\overrightarrow{A'B'} = \alpha \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BB'} = \beta \overrightarrow{AA'}$, c'est-à-dire :
$$B' = A' + \alpha B - \alpha A = \beta A' + B - \beta A,$$
d'où $\alpha = \beta$ donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$.
2. Notons λ le scalaire tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Il existe k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$, d'où $B' = A' + kB - kA$ donc :
$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} - k \overrightarrow{OA} = (\lambda - k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB},$$
ce qui prouve que $k = \lambda$ (car O, B et B' sont alignés).

□

Proposition 14.43.
Les bijections de $\mathscr{E}$ qui transforment toute droite en une droite parallèle forment un groupe dont les éléments sont exactement les homothéties et les translations. Ce groupe est appelé *groupe des homothéties-translations*, noté $HT(\mathscr{E})$.

Démonstration. Il est clair que l'ensemble de ces bijections est un groupe qui contient les homothéties et les translations. On montre la réciproque : soit f un telle bijection, nous allons examiner trois cas :

1. f n'a pas de point fixe : soit M un point de $\mathscr{E}$, on considère $N \notin (Mf(M))$, si $(Mf(M)) \cap (Nf(N)) = \{O\}$ alors O est un point fixe de f, en effet, par hypothèse,
$$(f(O)f(M)) \parallel (OM) = (Of(M)) \text{ donc } f(O) \in (Of(M)),$$
mais on a aussi
$$(f(O)f(N)) \parallel (ON) = (Of(N)) \text{ donc } f(O) \in (Of(N))$$
ce qui prouve que
$$\{f(O)\} = (Mf(M)) \cap (Nf(N)) = \{O\}\,.$$
L'application f étant supposée sans point fixe, les droites $(Mf(M))$ et $(Nf(N))$ sont donc parallèles, on est donc dans la situation 1 de la proposition précédente, f est une translation.
2. f admet un unique point fixe O : soient M et N tels que O, M et N ne soient pas alignés. On a :
$$(Of(M)) = (f(O)f(M)) \parallel (OM) \Rightarrow f(M) \in (OM)$$
et de même
$$(Of(N)) = (f(O)f(N)) \parallel (ON) \Rightarrow f(N) \in (ON).$$
De plus, par hypothèse, $(MN) \parallel (f(M)f(N))$, on est ainsi dans la situation 2 de la proposition précédente et f est une homothétie.
3. f admet au moins deux points fixes O et O', soit $M \notin (OO')$ alors la droite $(f(O)f(M))$ est une droite parallèle à (OM) qui contient O. C'est donc la droite (OM). De même, $(O'f(M')) = (O'M)$, ainsi $f(M) \in (OM) \cap (O'M)$ donc $f(M) = M$, les points de $\mathscr{E}$ qui ne sont pas sur (OO') sont fixes. Si $N \in (OO')$ alors le point $N \notin (OM)$ avec O et M fixes, on a donc pour les mêmes raisons $f(N) = N$, ainsi f est l'identité.

□

Proposition 14.44.
Soit $\mathscr{E}$ un espace affine dirigé par E, soit $\varphi : GA(\mathscr{E}) \to GL(E)$ qui à une application affine f associe son application linéaire $\vec{f}$. Le sous groupe $\varphi^{-1}(\mathscr{K}\,\mathrm{id}_E)$ est égal au groupe des homothéties-translations et il est distingué dans $GA(\mathscr{E})$. On a :
$$f \in HT(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ f(M+v) = f(M) + \lambda v,\ \forall M \in \mathscr{E},\ \forall v \in E.$$

1. Si $\lambda = 1$, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ pour tout $A \in \mathscr{E}$.
2. Si $\lambda \not{1}$, f est une homothétie de rapport λ et de centre (pour tout $A \in \mathscr{E}$)
$$C = \frac{-\lambda}{1-\lambda} A + \frac{1}{1-\lambda} f(A).$$

On laisse la démonstration en exercice.

14.5 Similitudes

Voir la leçon 37 de C. Boulonne, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2011. URL : `https://cboumaths.files.wordpress.com/2012/01/leconcapes2011.pdf` .

Définition 14.45. *Similitude du plan*

On appelle *similitude du plan*, toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle pour tous points M, N, P et Q ($M \neq N$ et $P \neq Q$) dont les images par f sont notées M', N', P' et Q', on a :
$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}.$$

Propriété 14.46.
Soit f une transformation du plan. f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, c'est-à-dire : pour tous points M et N dont les images par f sont notées M' et N', on a :
$$M'N' = kMN.$$

Propriété 14.47.
Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$.
Si f est une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k' alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk' (en général, on a $f \circ f' \neq f' \circ f$).

Définition 14.48.
Une similitude de rapport 1 est une transformation du plan qui conserve les distances, donc c'est une isométrie.

Définition 14.49. *Similitude directe*
On appelle *similitude directe* toute similitude conservant les angles orientés.

Remarque 14.50.
Si une similitude transforme les angles orientés en leur opposé, alors c'est une similitude *indirecte*.

Propriété 14.51.
Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation. Soit Ω l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f. f est la composée de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k et la rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ. Ces deux applications commutent, on peut écrire :
$$f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}.$$
Cette décomposition est appelée *forme réduite* de la similitude directe f.

Définition 14.52.
Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω, son rapport k et son angle θ. On dit que f est la *similitude directe* de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On notera $f = S_{\Omega,k,\theta}$ (k est un réel strictement positif et θ est un réel).

Définition 14.53. *Déplacement, antidéplacement*
Une *similitude directe* (resp. indirecte) de rapport 1 est appelé un *déplacement* (resp. *antidéplacement*).

Soit f une similitude plane. A, B, C et D sont quatre points et on note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$.

Propriétés 14.54. *Propriétés géométriques des similitudes planes, partie 1*

1. f conserve les rapports de distances : c'est-à-dire que si $A \neq B$, $C \neq D$, on a :
$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$
2. f conserve les angles géométriques : si A, B et C sont deux à deux distincts, on a : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
3. f conserve l'alignement : si A, B et C sont alignés alors A, B' et C' sont alignés.
4. f transforme une droite en une droite : si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et la droite $(A'B')$ est l'image par f de la droite (AB).
5. f transforme un segment en un segment : si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et le segment $[A'B']$ est l'image par f du segment $[AB]$.

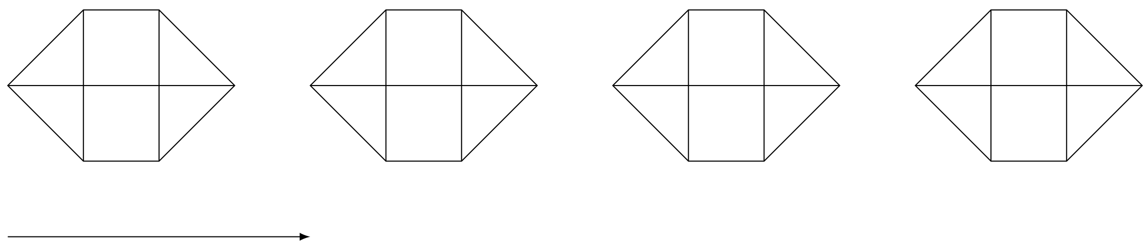
Propriétés 14.55. *Propriétés géométriques des similitudes planes, partie 2*

1. f conserve le parallélisme et l'orthogonalité :
   (a) si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles alors $(A'B')$ et $(C'D')$ sont deux droites parallèles ;
   (b) si (AB) et (CD) sont deux droites perpendiculaires alors $(A'B')$ et $(C'D')$ sont deux droites perpendiculaires.
2. f conserve les barycentres : si G est le barycentre de (M_1, α_1), (M_2, α_2), ..., (M_n, a_n) (avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$) alors son image G' est le barycentre des images affectées des mêmes coefficients : (M'_1, α_1), (M'_2, α_2), ..., (M'_n, α_n).
3. f conserve le milieu : si C est le milieu de $[AB]$ alors C' est le milieu de $[A'B']$.
4. f transforme un triangle en un triangle semblable : si A, B et C sont deux à deux distincts, alors A', B' et C' sont deux à deux distincts et les triangles $A'B'C'$ et ABC sont semblables (si f est une similitude directe, on dira que les triangles sont directement semblables, si f est une similitude indirecte, on dira que les triangles sont indirectement semblables).
5. f transforme un cercle en un cercle : l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR (où k est le rapport de la similitude f).

14.6 Frises et pavages

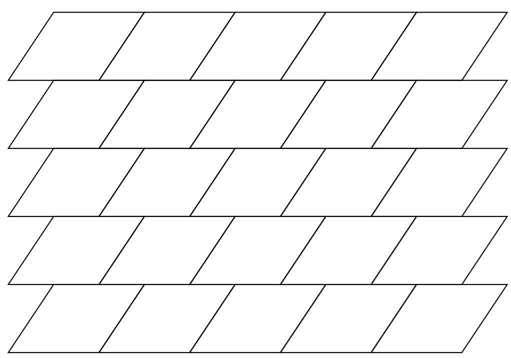
14.6.1 Frises

Définition 14.56.
Une *frise* est constituée d'un motif qui est reproduit dans une seule direction par translation.



14.6.2 Pavages

Définition 14.57.
Un pavage est constitué d'un motif qui est reproduit dans deux directions par des translations et qui recouvre le plan sans trou, ni superposition.



Théorème 14.58.
Les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont :

- les triangles équilatéraux
- les carrés
- les hexagones réguliers.

Démonstration. Soit un polygone régulier à n côtés et θ la valeur de l'angle entre deux côtés consécutifs. Divisons-le en n triangles isocèles identiques de sorte à ce que chacun est comme base l'un des côtés du polygone.

On note, dans ces triangles isocèles, β l'angle unique et α tel que $2\alpha = \theta$. Nous avons alors :

$$\beta = \frac{2\pi}{n}.$$

De plus, comme les triangles sont isocèles :

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta = \pi &\Leftrightarrow 2\alpha + \frac{2\pi}{n} = \pi \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi(n-2)}{2n}. \end{aligned}$$

Comme $\theta = 2\alpha$, il vient :

$$\theta = \frac{\pi(n-2)}{n}.$$

Pour que le polygone pave le plan, il doit donc existe un entier naturel j tel que :

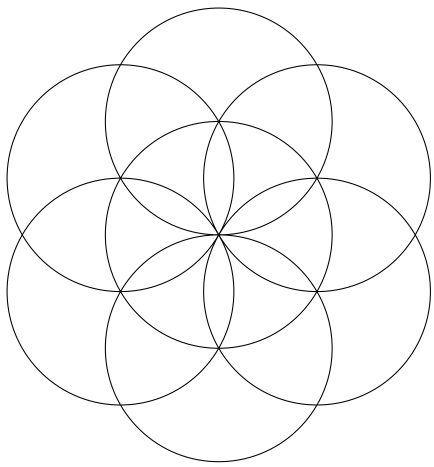
$$\begin{aligned} 2\pi = k\theta \Leftrightarrow 2\pi = \frac{k\pi(n-2)}{n} &\Leftrightarrow 2 = \frac{k(n-2)}{n} \\ &\Leftrightarrow k(n-2) = 2n \Leftrightarrow k(n-2) = 2(n-2) + 4 \Leftrightarrow (n-2)(k-2) = 4. \end{aligned}$$

Autrement dit, $(n-2)$ doit être diviseur de 4. Comme les seuls diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4, n peut donc valoir 3, 4 ou 6.

Par conséquent, aucun autre polygone convexe régulier ne peut paver le plan. □

14.6.3 Rosaces

Définition 14.59.
Une rosace est constituée d'un motif qui est reproduit plusieurs fois par rotation.



14.6.4 Frises et pavages au Brevet

▶ **Exercice 14.60.** *Brevet Pondichéry 2018, Exercice 2*
Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.

Le motif pied-de-coq représenté par le polygone ci-dessous à droite (figure 2) qui peut être réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

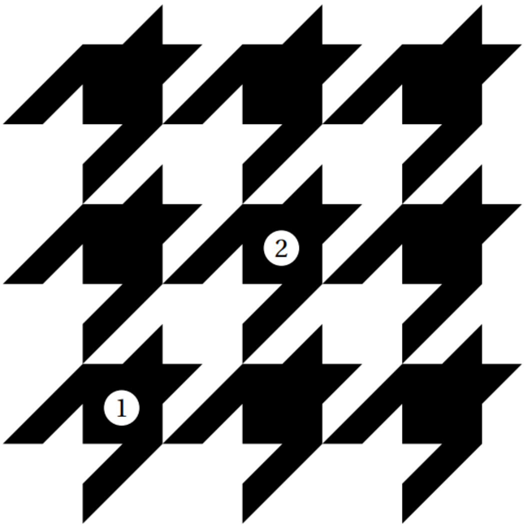


Figure 1

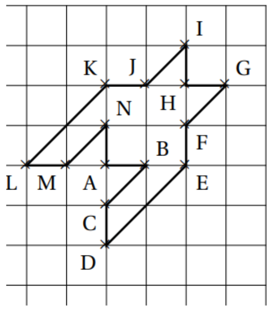


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?
2. Dans cette question, on considère que $AB = 1$ cm (figure 2). Déterminer l'aire du motif pied-de-coq.
3. Marie affirme : « si je divise par 2 les longueurs d'un motif, son aire sera aussi divisée par 2 ». A-t-elle raison ? Expliquer pourquoi.

◊ *Solutions.* 1. On peut obtenir le motif 2 à partir du motif 1 grâce à une translation oblique.

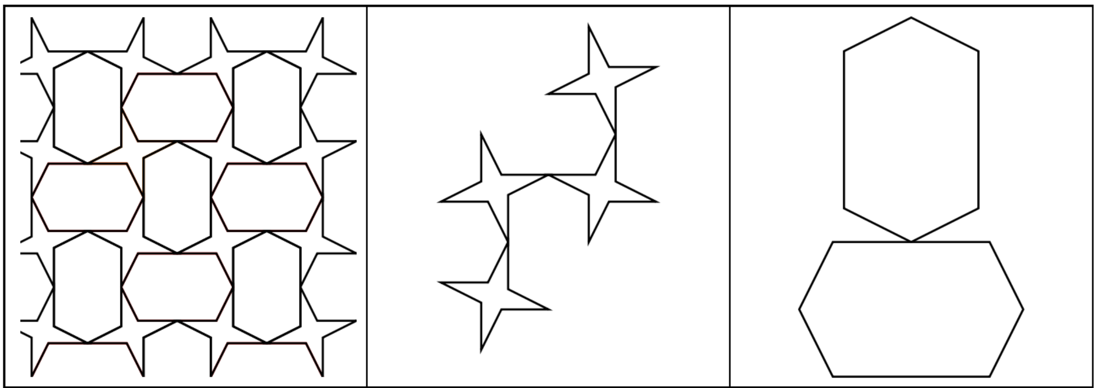
2. Sur la figure 2, on constate que l'aire du motif pied-de-coq s'obtient par la somme des aires suivantes :
   — **Aire du carré $AEHK$:**
   $$\mathscr{A}_{AEHK} = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2.$$
   — **Aire du trapèze $BEDC$ et trapèze $LKNM$:**
   $$\mathscr{A}_{BEDC} = \mathscr{A}_{LKMN} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ cm}^2.$$
   — **Aire du triangle IJH et GHF :**
   $$\mathscr{A}_{IJH} = \mathscr{A}_{GHF} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2.$$
   Ainsi, l'aire du motif pied-de-coq est égale à :
   $$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\text{motif}} &= \mathscr{A}_{AEHK} + \mathscr{A}_{BEDC} + \mathscr{A}_{IJH} + \mathscr{A}_{GHF} + \mathscr{A}_{LKMN} \\ &= 4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$
3. Marie a tort car quand on divise par 2 les longueurs du motif alors on divise par $2^2 = 4$ son aire.

□

14.6.5 Frises et pavages au BAC STD2A

▶ **Exercice 14.61.** *BAC STD2A Métropole 2018, Exercice 3*
Pour sa dernière création textile, un styliste s'inspire d'un pavage que l'on peut voir sur les murs du palais de l'Alhambra. Pour imprimer ce pavage sur un tissu, on utilise un tampon qu'une machine déplace en translations au-dessus du tissu et applique à un motif.

Deux impressions différentes sont réalisées, l'une avec un motif constitué de quatre étoiles (*motif A*) et l'autre avec un motif constitué de deux hexagones (*motif B*). Dans le (*motif A*), les quatres étoiles sont superposables. Dans le (*motif B*), les deux hexagones sont superposables. Dans la figure ci-dessous, on a représenté une partie du pavage, le (*motif A*) et le (*motif B*).



Partie du pavage	*(motif A)*	*motif B*

Dans la **Partie A** de cet exercice, on étudie l'impression réalisée avec le (*motif A*).

Dans la **Partie B** de cet exercice, on étudie l'impression réalisée avec le (*motif B*).

Partie A : Étude de l'impression réalisée avec le (*motif A*)

1. Le (*motif A*) représenté sur la figure 1 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** a été construit à partir de l'étoile numérotée 1.
   (a) Donner une transformation qui permet d'obtenir l'étoile numérotée 2 à partir de l'étoile numérotée 1.
   On fera apparaître sur la figure 1 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** les éléments caractéristiques de cette transformation.
   (b) Quelle transformation a permis d'obtenir le (*motif A*) à partir des étoiles numérotées 1 et 2 ?
   On fera apparaître sur la figure 1 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** les éléments caractéristiques de cette transformation.
2. Le (*motif A*) permet de paver le plan à l'aide des transformations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés par $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EK}$ sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.
   (a) Les points J, F et L sont les images respectives du point G par les translations de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $2\vec{u} + \vec{v}$. Placer les points J, F et L sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.
   (b) Donner deux nombres entiers a et b tels que l'image du point D par la translation de vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ soit le point H. Représenter le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.

Partie B : Étude de l'impression réalisée avec le (*motif B*)

Le (*motif B*) représenté sur la figure 2 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie** a été construit à partir de l'hexagone numéroté 1.

1. Dans le (*motif B*), par quelles transformations géométriques passe-t-on de l'hexagone numéroté 1 à l'hexagone numéroté 2 ?

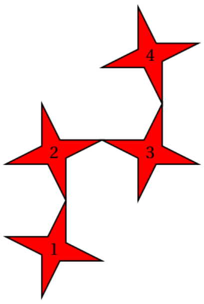
Représenter les éléments caractéristiques de ces transformations sur la figure 2 de **annexe 2 à rendre avec la copie**.

2. Comment obtient-on le pavage à partir du (*motif B*) ?

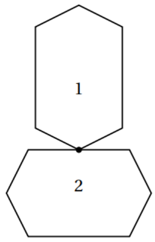
   Représenter les éléments caractéristiques des transformations géométriques nécessaires sur la figure 3 de l'**annexe 2 à rendre avec la copie**.

Annexe 2 à rendre avec la copie

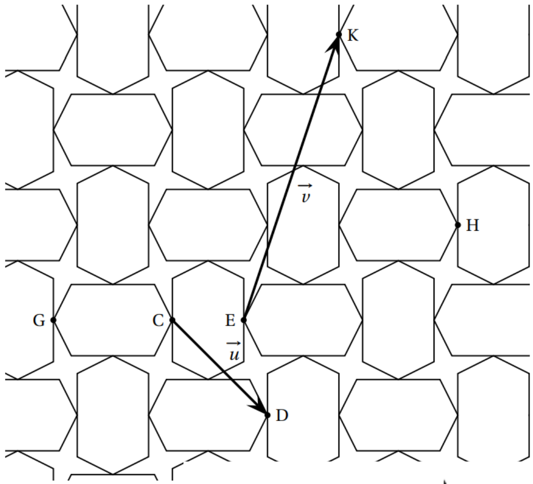
EXERCICE 3 - Figure 1



EXERCICE 3 - Figure 2



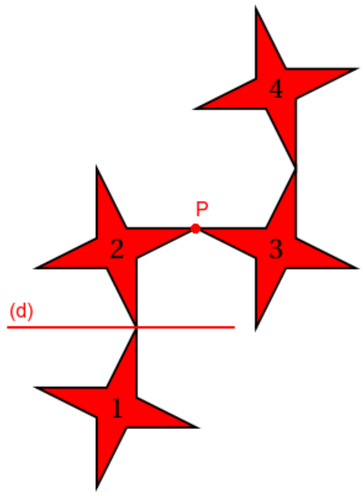
EXERCICE 3 - Figure 3



◊ *Solutions.* **Partie A**

1. (a) Pour obtenir l'étoile numérotée 2 à partir de l'étoile numérotée 1 sur le *(motif A)*, il faut appliquer une symétrie d'axe horizontal qui passe par la pointe « Nord » de l'étoile numérotée 1. L'axe de symétrie est marquée (d) sur la figure ci-dessous.

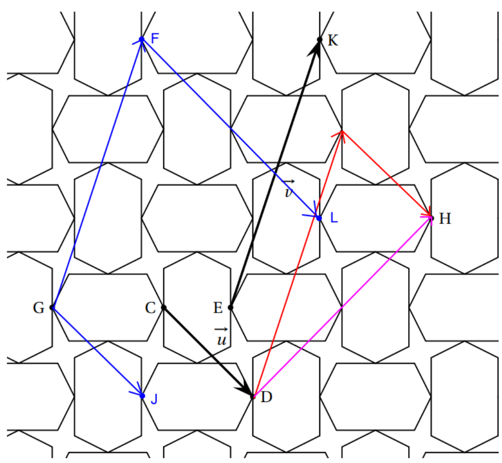
   (b) Pour obtenir le *(motif A)* à partir des étoiles numérotées 1 et 2, il faut appliquer une symétrie centrale par rapport à la pointe « Est » de l'étoile numérotée 2. Le centre de symétrie est marquée P sur la figure ci-dessous.



2. (a) Voir la figure ci-contre.

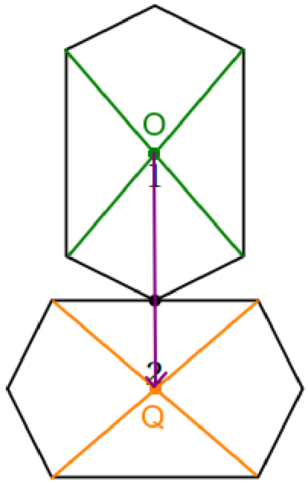
   (b) $\overrightarrow{DH} = \vec{u} + \vec{v}$ donc $a = 1$ et $b = 1$.

EXERCICE 3 - Figure 3



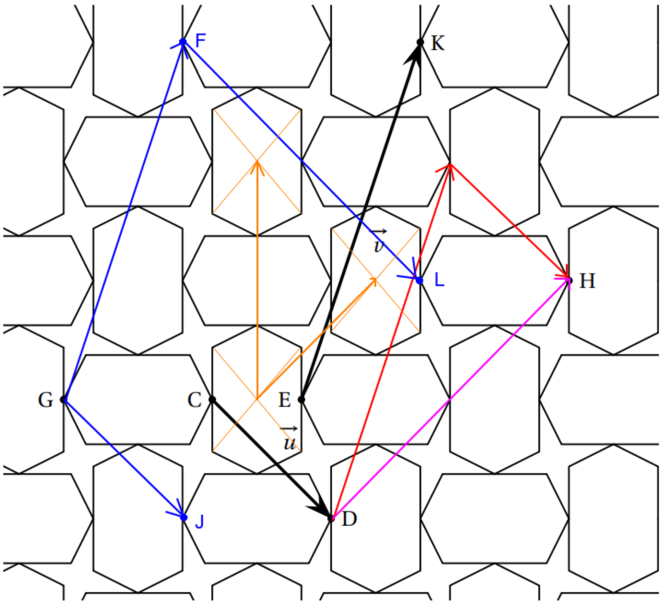
Partie B

1. L'hexagone numérotée 2 est obtenu à partir de l'hexagone numéroté 2 par la composition d'une translation verticale et d'une rotation de 90° de centre O le centre de l'hexagone numérotée 1. Les éléments caractéristiques de ces transformations sont indiqués sur la figure ci-dessous.



2. Le pavage est obtenu à partir du *(motif B)* grâce à une translation verticale et une translation oblique. Les éléments caractéristiques de ces deux translations sont indiqués en orange sur la figure ci-dessous.

EXERCICE 3 - Figure 3



□

14.6.6 Frises et pavages au CAPES

On parle de pavages et de frises dans l'épreuve écrite n° 1 (option mathématiques) du CAPES de Mathématiques session 2017 :

https://capes-math.org/data/uploads/ecrits/EP1_2017_math.pdf

LEÇON

15 Relations métriques et angulaires dans le triangle.

Préambule

Niveau : lycée

Prérequis : géométrie du triangle

Références :

[1] G. Costantini, *Trigonométrie, relations métriques dans un triangle.*

[2] Contributeurs de Wikipédia, *Théorème de Pythagore*, Wikipédia.

[3] M. Lezen, *Leçon n° 32 : Relations métriques dans un triangle. Trigonométrie. Applications.* [url].

[4] Contributeurs de Wikipédia, *Inégalité triangulaire*, Wikipédia.

[5] Contributeurs de Wikipédia, *Théorème de la médiane*, Wikipédia.

[6] Contributeurs de Wikipédia, *Somme des angles dans un triangle*, Wikipédia.

15.1 Relations métriques dans le triangle

15.1.1 Inégalité triangulaire

Propriété 15.1.
Dans un plan euclidien, soit un triangle ABC. Alors les longueurs AB, AC et CB vérifient les trois inégalités suivantes :

$$AB \leqslant AC + CB;$$
$$AC \leqslant AB + BC;$$
$$BC \leqslant BA + AC.$$

Réciproquement, étant données trois longueurs dont chacune est inférieure à la somme des deux autres, il existe un triangle ayant ces longueurs de côté.

Cas d'égalité :

$$AB = AC + CB \Leftrightarrow C \in [AB].$$

Démonstration. ◊ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle x, y\rangle \leqslant |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$. D'où :

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| .$$

Et donc :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$$

Cas d'égalité : supposons que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ et $y \neq 0$. Par ce qui précède, on a donc :

$$\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| .$$

Donc, par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, $x = \lambda y$ avec $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} = \frac{\|x\|}{\|y\|} \geqslant 0$. Finalement, on a bien $\lambda y = \mu x$ avec $\mu = 1$. □

Pour les cinquièmes,

Propriété 15.2.
Dans un triangle non aplati, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des deux autres côtés.

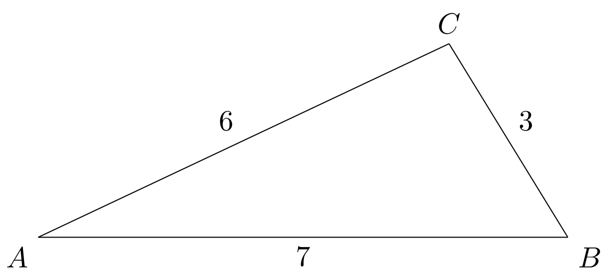
Conséquence 15.3.
Pour tous points A, B et C du plan, si $AC < AB + BC$ alors on peut construire un triangle ABC.

Autre formulation :

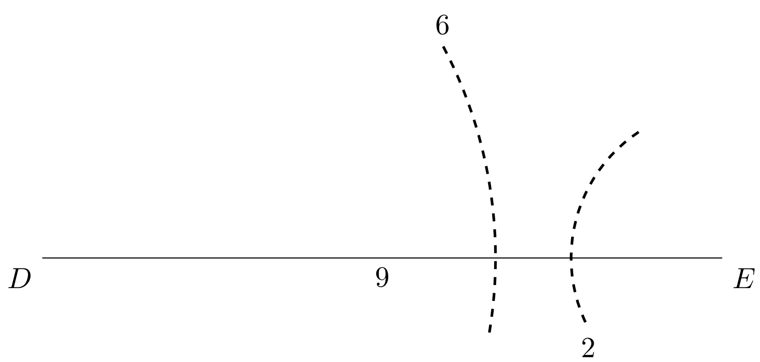
Proposition 15.4.
Pour savoir si un triangle est constructible avec trois longueurs données, il faut que la somme des deux plus petites longueurs soit supérieure à la plus grande.

Exemples 15.5.

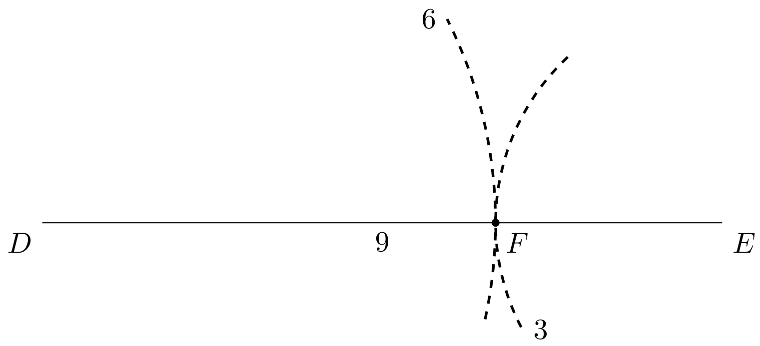
1. On veut savoir si le triangle ABC est constructible si $AB = 7$ cm, $B = 3$ cm et $AC = 6$ cm. Le plus grand côté est 7 et $7 < 3 + 6$ ou encore $AB < AC + BC$ donc oui le triangle est constructible.



2. On veut savoir si le triangle EDF est constructible si $ED = 9$ cm, $EF = 2$ cm et $DF = 6$ cm. Le plus grand côté est 9 or 9 n'est pas plus petit que $2 + 6$ donc le triangle EDF n'existe pas.



3. Cas particulier : Si $DF = 6$ cm et $EF = 3$ cm alors $DE = DF + EF$. On dit alors que le triangle est aplati.



Propriété 15.6.
Si le point B appartient au segment $[AC]$ alors $AC = AB + BC$.

Le point B appartient au segment $[AC]$ signifie aussi que les 3 points A, B et C sont alignés.

15.1.2 Théorème de Pythagore

Théorème 15.7. *Théorème de Pythagore*
ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

◊ *Démonstration du théorème de Pythagore.* Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs portés par les côtés du triangle ABC vérifient la relation de Chasles :

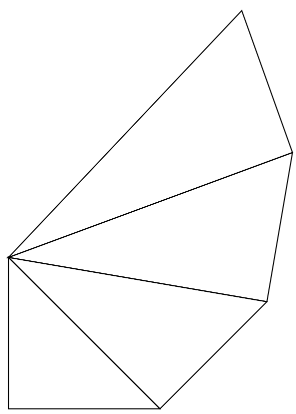
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Ainsi :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

donc la relation du théorème est équivalente à l'annulation du dernier produit scalaire, ce qui correspond précisément au cas où les vecteurs sont orthogonaux, autrement dit lorsque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ forment un angle droit. □

Exemple 15.8. *Escargot*
On part d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés autres que l'hypoténuse mesurent 1 unité. L'hypoténuse mesure alors $\sqrt{2}$ unités. On place un triangle rectangle sur cette hypoténuse, son côté adjacent à l'angle droit mesurant 1 unité. Alors l'hypoténuse de ce nouveau triangle mesure $\sqrt{3}$ unités, et ainsi de suite…



15.1.3 Formules d'Al-Khashi

Théorème 15.9. *Formule d'Al-Kashi*
Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

◊ *Démonstration du théorème 15.9.* Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ = c^2 + b^2 + 2bc\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos\widehat{A}$. □

15.1.4 Formule des 3 sinus

Théorème 15.10. *Formule des 3 sinus*
Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de se triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Démonstration du théorème 15.10. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

- Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.
- Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

15.1.5 Théorème de la médiane

Théorème 15.11. *Théorème d'Apollonius*
Soient ABC un triangle quelconque et (AI) la médiane issue de A. On a alors la relation suivante :

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

ou encore :

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

◊ *Démonstration par le produit scalaire.* Cette propriété est un cas simple de la réduction de la fonction scalaire de Leibniz : il suffit de faire intervenir le point I dans les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, par la relation de Chasles :

$$AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2.$$

Si on développe l'expression de droite, on obtient :

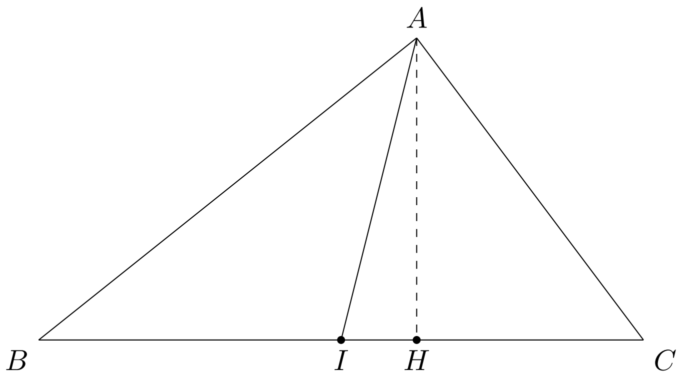
$$AB^2 + AC^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC}.$$

Le point I est milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont opposés, ce qui implique que les produits scalaires s'éliminent et $IC^2 = IB^2$ donc :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2.$$

□

◊ *Démonstration sans le produit scalaire.* Soit H le pied de la hauteur issue de A.



Les trois triangles AHB, AHC et AHI sont rectangle en H ; en leur appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2,\ AC^2 + AH^2 + HC^2 \quad \text{et} \quad AI^2 = AH^2 + HI^2.$$

On en déduit :

$$AB^2 + AC^2 = HB^2 + HC^2 + 2AH^2 = HB^2 + HC^2 + 2(AI^2 - HI^2).$$

On exprime HB et HC en fonction de HI et BI. Quitte à intervertir B et C si nécessaire, on peut toujours supposer que B et H sont du même côté de I. Alors :

$$HB = |HI - BI| \quad \text{et} \quad HC = HI + IC = HI + BI.$$

On peut donc transformer, dans l'expression ci-dessus de $AB^2 + AC^2$, la sous-expression

$$\begin{aligned} HB^2 + HC^2 &= (HI - BI)^2 + (HI^2 + BI)^2 \\ &= HI\text{"}2 - 2HI.BI + BI^2 + HI^2 + 2HI.BI + BI^2 \\ &= 2HI^2 + 2BI^2. \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient :

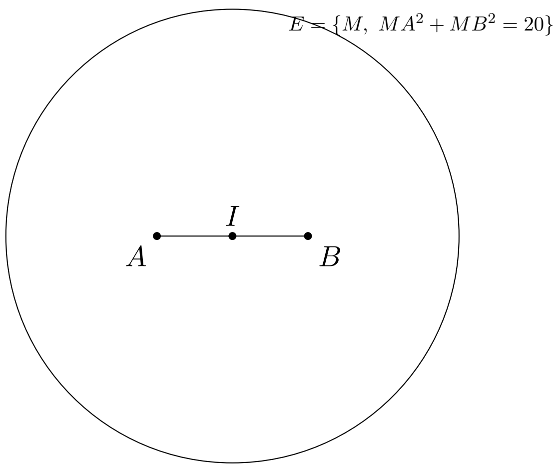
$$AB^2 + AC^2 = 2HI^2 + 2BI^2 + 2(AI^2 - HI^2) = 2BI^2 + 2AI^2$$

□

Exemple 15.12.
Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 20 &\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \\ &\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \\ &\Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3 \end{aligned}$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

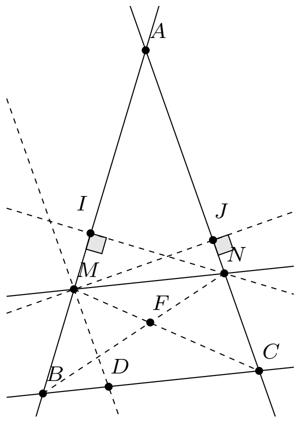


15.1.6 Théorème de Thalès

Théorème 15.13.
Soit deux droites d et d' sécantes en un point A ; B et M deux points de d distinct de A et C et N deux points de d' distinct de A (A, B et M alignés dans le même ordre que A, C et N). Alors :

$$(BC)//(MN) \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Démonstration. ◊ On considère les triangles AMN et BNA.



On a : $2\mathscr{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathscr{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathscr{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathscr{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathscr{A}(BNA) = \mathscr{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathscr{A}(MFB) = \mathscr{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathscr{A}(BNM) = \mathscr{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathscr{A}(BNM) = \mathscr{A}(BMF) + \mathscr{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathscr{A}(CMN) = \mathscr{A}(CFN) + \mathscr{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.

Ainsi, comme $\mathscr{A}(BNA) = \mathscr{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(BNA)} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.

Réciproque : elle utilise le sens direct.

Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. □

15.2 Relations angulaires dans le triangle

15.2.1 Somme des angles dans un triangle

Propriété 15.14.
Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.

Démonstration. ♢
Soit ABC un triangle. On note $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$.

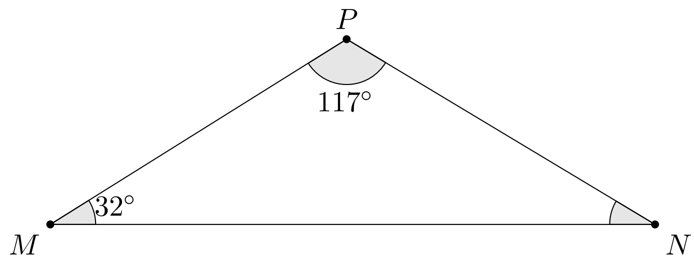
On trace (d) la droite parallèle à (BC) passant par A. Soit D un point « à gauche » de A sur la droite (d) et E un point « à droite » de A sur la droite (d).

Comme (d) est parallèle à (BC), les angles alternes-internes qui forment sont égaux. Ainsi les angles β et $\widehat{DAB}$ sont de même mesures (de même pour γ et $\widehat{EAC}$). Les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{EAC}$ sont adjacents et forment tous les trois un angle droit. Ainsi :

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = \beta + \alpha + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

□

Exemple 15.15.
Dans la figure ci-dessous, on veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{MNP}$.



Dans le triangle MNP, on a :

$$\widehat{MPN} + \widehat{NMP} = 117° + 32° = 149°.$$

Or, dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°. Donc : $\widehat{MNP} = 180° - 149° = 31°$.

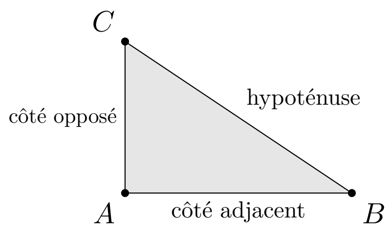
15.2.2 Trigonométrie dans un triangle rectangle

Définition 15.16.
Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}.$$



Remarque 15.17.

On a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$:

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}, \ \sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}, \ \tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

Propriété 15.18.
Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1 et ils n'ont pas d'unité.

15.2.3 Formules trigonométriques

Propriété 15.19.
Pour toutes valeurs de x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

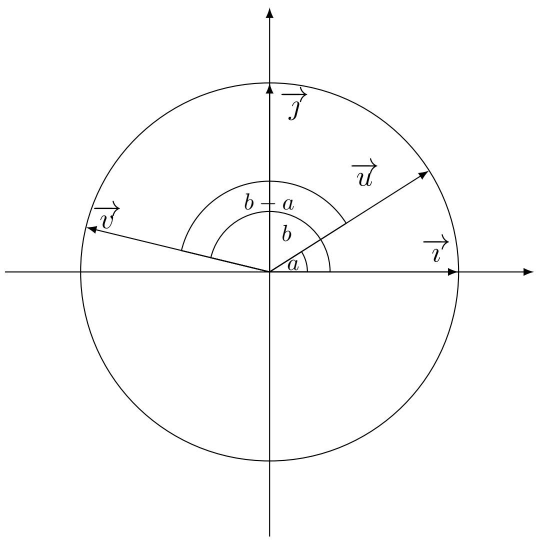
Proposition 15.20. *Formules d'addition*

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

◊ *Justification d'une formule de trigonométrie.*

Méthode utilisant le produit scalaire On va étudier la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires tels que :

$$(\vec{\imath}, \vec{u}) = a \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \vec{v}) = b.$$



Une première expression du produit scalaire donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \vec{v}) = b - a$$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car la fonction cosinus est paire. D'autre part, d'après la définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

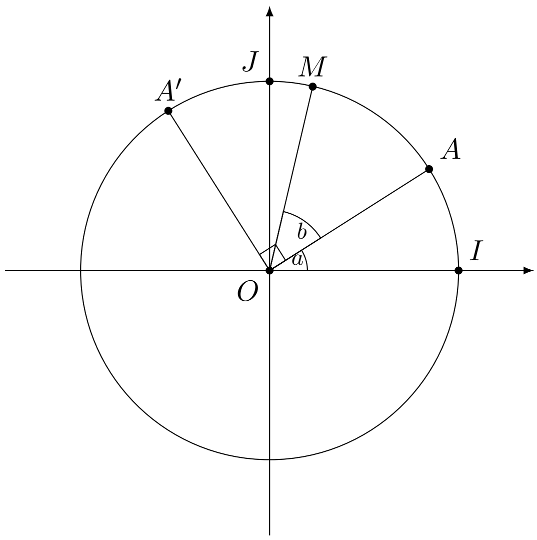
D'après l'expression du produit scalaire avec les coordonnées $(xx' + yy')$, on obtient alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ce qui nous donne une formule trigonométrique :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Méthode n'utilisant pas le produit scalaire On étudie cette fois-ci $\cos(a+b)$ où a et b sont deux nombres réels. On considère le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur ce cercle, on place un point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = a$, le point M tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = b$ et le point A' tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}$.



D'après la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a + b \pmod{2\pi}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}.$$

Mais en se plaçant dans le repère orthonormé (O, A, A'), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

et en exprimant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OA'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{OI} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{OJ} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{OI} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{OJ} \\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\overrightarrow{OI} + [\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]\overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, il vient les deux relations :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$\square$

Proposition 15.21. *Formules de duplication*

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

$\lozenge$ *Démonstration de la proposition 15.21.*

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

$\square$

Proposition 15.22. *Formule de linéarisation*

1. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$,
2. $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

$\lozenge$ *Démonstration de la proposition 15.22.* On rappelle que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ quelque soit le réel x. Donc :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1,$$

d'où $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$. De même,

$$\cos(2a) = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

d'où $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$. $\square$

Exemple 15.23.

On va calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$. En utilisant les formules de linéarisation :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\cos\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

et comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, il vient $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Or :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

D'où :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$$

En utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

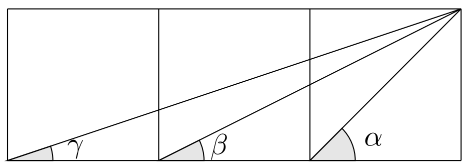
D'où

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = 2-\sqrt{3}.$$

15.3 Applications

15.3.1 Trois carrés

Exemple 15.24.
On considère trois carrés disposés comme dans la figure ci-dessous. Montrer que $\alpha = \beta+\gamma$.



On a bien sûr $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On montre donc que $\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$. D'après une formule d'addition :

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma.$$

Or, si l'on note a la longueur des côtés des carrés, on a (d'après le théorème de Pythagore et les relations du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle) :

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ \cos\gamma = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin\beta &= \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\cos(\beta+\gamma) = \frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et comme $0 < \beta+\gamma < \pi$, on a bien $\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$.

15.3.2 Applications de la formule d'Al-Kashi

Exemple 15.25.
Soit ABC un triangle avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{S}$ de ABC.

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

Donc :

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

On remplace par les valeurs numériques :

$$\cos \widehat{A} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{7}{8}.$$

Or $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$, donc :

$$\sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}.$$

Or ABC étant un triangle, l'angle $\widehat{A}$ est compris entre 0 et π rad donc son sinus est positif. D'où :

$$\sin \widehat{A} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Enfin, d'après la formule de l'aire du triangle, on obtient :

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

Exemple 15.26.
Soit ABC un triangle avec $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49.$$

D'où $a = 7$. On peut déterminer $\cos \widehat{B}$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13}{14}.$$

On a $\cos B > 0$ et ABC triangle donc $B \in \left]0; 90\right[$. On calcule donc $\widehat{B} = \arccos \frac{13}{14} \simeq 21,8°$. On peut calculer $\widehat{C}$ avec la relation $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$. Ainsi :

$$\widehat{C} = 180 - 21,8 - 60 = 98,2°.$$

15.3.3 Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un cercle

Exemple 15.27. *Aire maximale d'un rectangle inscrit dans un cercle*
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1 cm. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle $\mathscr{C}$.

On note O le centre du cercle et soit I et K deux points diamétralement opposés. Soit M un point mobile sur le cercle et on note x une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Enfin, on note M' le point diamétralement opposé à M. D'après la formule de l'aire d'un triangle exprimée avec un sinus :

$$\mathscr{A}(MOI) = \frac{1}{2} OM \times OI \sin x.$$

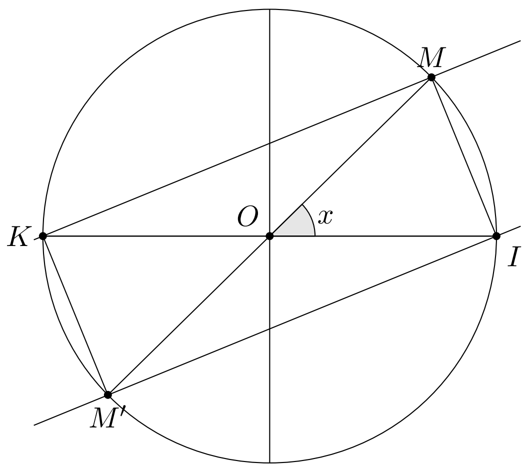
Comme le rayon du cercle est égal à 1 :

$$\mathscr{A}(MOI) = \frac{1}{2} \sin x.$$

Enfin, les diagonales d'un rectangle partagent celui-ci en quatre triangles de même aire (puisque la médiane dans un triangle partage celui-là en deux triangles de même aire) donc :

$$\mathscr{A}(MKM'I) = 2\sin x.$$

L'aire du rectangle inscrit dans le cercle est donc maximale lorsque le sinus l'est, à savoir pour $x = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré ; l'aire maximale est alors de 2 cm^2.



15.3.4 Formule de Héron

Exemple 15.28. *Formule de Héron*
Soit ABC un triangle de demi-périmètre p (p est défini par la relation $2p = a + b + c$). On montre que l'aire $\mathscr{S}$ de ABC est donnée par :

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(formule de Héron).}$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{A} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
1-\cos\widehat{A} &= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} \\
&= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \\
1+\cos\widehat{A} &= 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sin^2\widehat{A} &= 1-\cos^2\widehat{A} \\
&= (1-\cos\widehat{A})(1+\cos\widehat{A}) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)}{4b^2c^2} \\
4b^2c^2\sin^2\widehat{A} &= (2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p) = 16p(p-a)(p-b)(p-c).
\end{aligned}$$

En outre,

$$\mathscr{S}^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \widehat{A} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

D'où la formule de Héron.

15.3.5 Inégalités dans le triangle

Exemple 15.29. *Inégalités dans le triangle*
Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, et $c = AB$. On va montrer que :

$$|b-c| \leqslant a \leqslant b+c.$$

D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \Leftrightarrow \cos \widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$-2bc \leqslant a^2 - b^2 - c^2 \leqslant 2bc.$$

D'où $(b-c)^2 \leqslant a^2 \leqslant (b+c)^2$. Par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0;+\infty[$, on obtient :

$$|b-c| \leqslant |a| \leqslant |b+c|.$$

Comme a, b et c sont des quantités positives :

$$|b-c| \leqslant a \leqslant b+c.$$

15.3.6 Autres applications

Exemple 15.30.
On construit un puits de pétrole P. À 530 m du coin du champ rectangulaire, à 210 m du coin C opposé, à 105 m du coin B.

À quelle distance se trouve-t-il du quatrième coin ?

Exemple 15.31.
On considère un triangle ABC. On construit les carrés $ABEF$ et $ACGH$ extérieurement au triangle.

Montrer que $FC = BH$.

LEÇON

16

Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes.

Préambule

Niveau : transversal

Prérequis : intégrales, géométrie dans l'espace.

Références :

[1] M. Cuaz, *Géométrie dans l'espace, solides de l'espace.* [url]

[2] Contributeurs de Wikipédia, *Solide géométrique.* Wikipédia.

[3] T. Eveilleau, *Les solides de Platon.* [url]

[4] S. Delaunay, *M302 : Cours de Géométrie I*, 2009-2010.

[5] C. Boulonne, *Notes de cours, M103 : Fondements de l'analyse 2.* 2006-2007.

16.1 Définitions

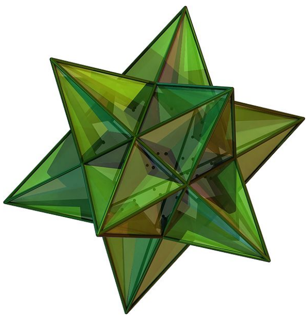
16.1.1 Définition de la vie courante

Définition 16.1. *Solide*

Un solide dans l'espace est un ensemble de points situés à l'intérieur d'une partie fermée de l'espace.

Définition 16.2. *Polyèdre*

Lorsque ces solides sont déterminés par des surfaces planes polygonales, on les appelle « *polyèdres* ».
Ces surfaces sont alors appelées *faces*, dont les côtés sont des arêtes ayant pour extrémités des sommets du polyèdre.



Définition 16.3. *Volume*

On appelle *volume* la portion de l'espace occupée par un solide.

Définition 16.4. *Patron*

Un *patron* d'un solide est un modèle plan permettant de construire par pliage, le solide.

16.1.2 Définition selon de grands mathématiciens

Définition 16.5. *Selon Platon*

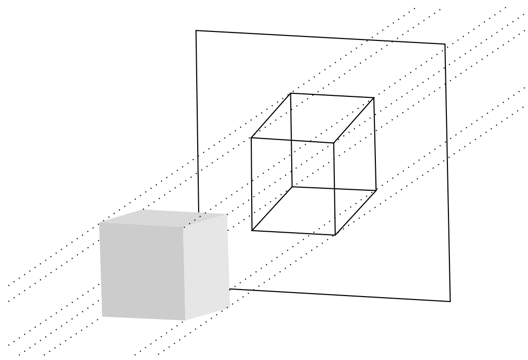
Est solide ce qui possède longueur, largueur et profondeur, et la limite d'un solide est une surface.

Définition 16.6. *Selon Leibniz*
Le chemin suivi par un point se déplaçant vers un autre est une ligne (...) Le déplacement de cette ligne dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne une surface. Le déplacement d'une surface dont les points ne se remplacent pas sans cesse donne un solide.

16.2 Règles de la perspective cavalière

16.2.1 Notion de perspective

Définition 16.7.
La perspective est une technique de représentation des solides sur une surface plane.



Remarque 16.8.
La perspective cavalière donne une meilleure idée de la forme réelle du cube dans l'espace.

16.2.2 Règles de construction

Théorème 16.9. *Règles de construction d'un solide en perspective cavalière*

- Les éléments cachés sont tracés en pointillés, les éléments visibles sont en trait plein.
- Les éléments situés dans un plan vu de face (frontal) sont représentés en vraie grandeur.
- Les droites perpendiculaires au plan frontal sont représentées par des droites parallèles formant un angle (de fuite) avec l'horizontale.
- Les longueurs représentées dans la direction des lignes fuyantes ne sont pas les longueurs réelles (on les réduite par un coefficient de réduction en général 0,5 ou 0,7.

16.2.3 Propriétés de la perspective cavalière

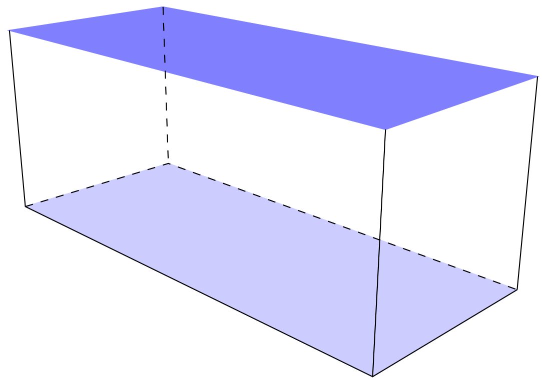
Propriétés 16.10.

- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
- Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes.
- Des points alignés sont représentées par des points alignés.
- Les milieux de segments sont conservés.

16.3 Solides usuels

16.3.1 Parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)

Définition 16.11.
Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont toutes les faces sont rectangulaires.
Il y a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes.



Remarque 16.12.
Si toutes les faces du parallélépipède rectangle sont des carrés, on appelle ce solide, un cube.

Propriété 16.13.
Si on note L, l et h les dimensions du pavé droit, alors :

— le volume est : $L \times l \times h$;

— l'aire est $2 \times (Ll + lh + Lh)$;

— la grande diagonale mesure $\sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$.

Propriété 16.14.
La section d'un pavé droit avec un plan parallèle à une face est un rectangle de même mesure que cette face.

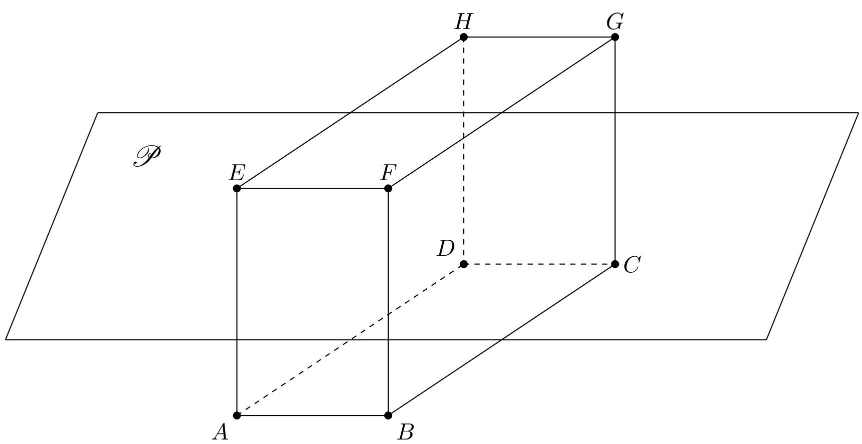
La section d'un pavé droit avec un plan parallèle à une arrête est un rectangle dont les mesures dépendent du plan.

$\Diamond$

Pour la démonstration de la propriété 16.14, on aura besoin du résultat suivant :

Théorème 16.15. *« Théorème du toit »*
Si deux plans distincts (non parallèles) contiennent deux droites parallèles, alors l'intersection de ces deux plans est une droite parallèle aux deux autres, c'est-à-dire, si $(d_1) \subset \mathscr{P}_1$, $(d_2) \subset \mathscr{P}_2$ et si $(d_3) = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ alors $(d_3)//(d_1)$ et $(d_2)//(d_3)$.

Démonstration de la propriété 16.14.



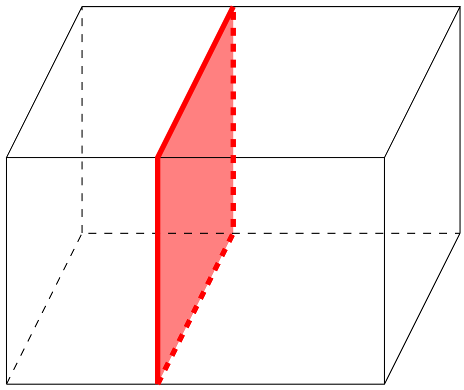
Soit $\mathscr{P}$ un plan d'intersection parallèle avec (FB). On montre que l'intersection est un rectangle.

Puisque $\mathscr{P} // (FB)$, $\mathscr{P} \cap (BGC)$ est parallèle à (BF). On montre de même que $\mathscr{P} \cap (EAD)$ est parallèle à (EA).

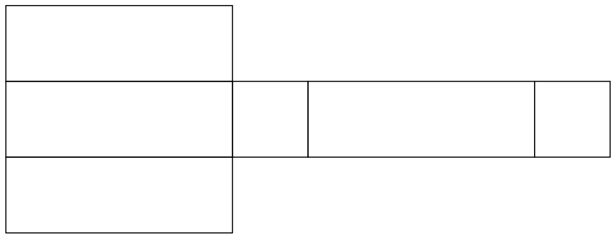
Donc les côtés opposés $\mathscr{P} \cap (BGC)$ et $\mathscr{P} \cap (EAD)$ sont parallèles. Ainsi, en utilisant le théorème de Thalès dans l'espace, on montre qu'ils sont de même longueur.

De plus, puisque $\mathscr{P} \cap (BCG)$ est parallèle à (BF), elle est orthogonale à (ABC), et en particulier à la droite $\mathscr{P} \cap (ABC)$.

On a donc un parallélogramme avec un angle droit, c'est un rectangle. □



On donne ci-dessous le patron du parallélépipède rectangle.



16.3.2 Prismes et cylindres

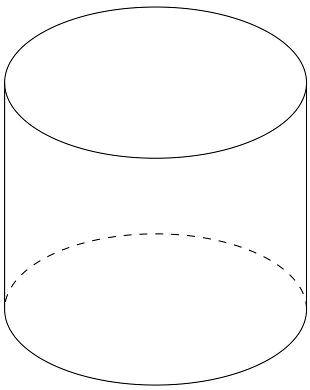
Définition 16.16.

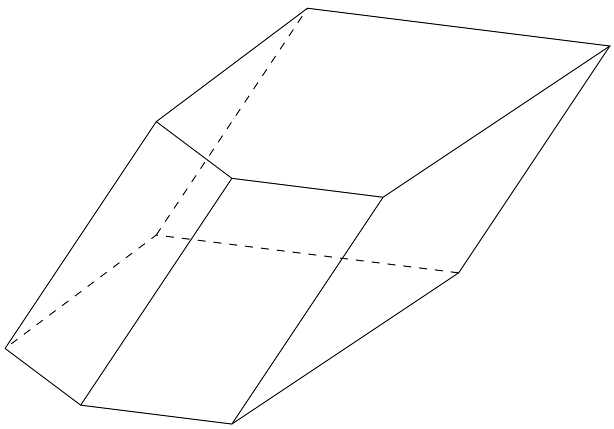
Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans parallèles et M un point de $\mathscr{P}_1$.

Soit un polygone $\mathscr{P}$ et un cercle $\mathscr{C}$ inclus dans $\mathscr{P}_1$. On considère la droite (d) passant par M et non parallèle à $\mathscr{P}_1$.

On appelle *prisme* (resp. *cylindre*) le solide délimité par la surface latérale que décrit (d) quand M décrit $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{C}$).

On appelle (d) *génératrice* du prisme (resp. cylindre) et la distance entre $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est appelé *hauteur*.





Remarques 16.17.

1. Lorsque (d) est orthogonal à $\mathscr{P}_1$, on dit que le prisme (resp. cylindre) est droit (resp. de révolution).
2. Les pavés sont des prismes droits.

Propriété 16.18.

— Le volume du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathscr{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

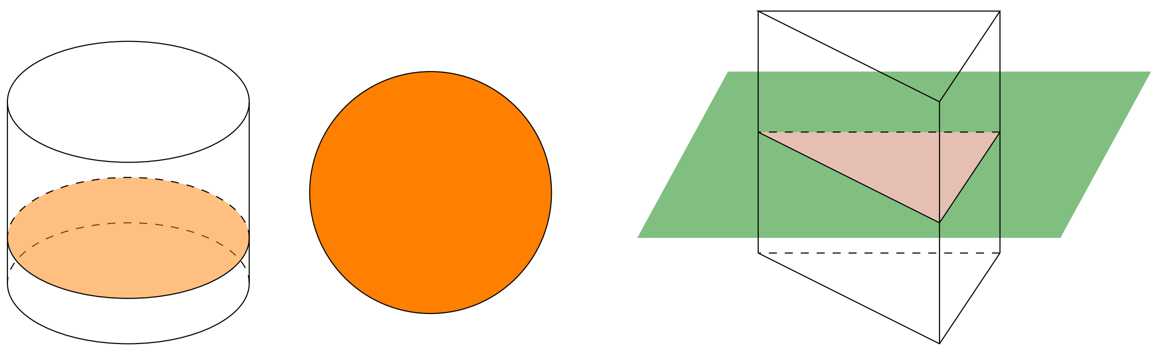
— L'aire du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathscr{A} = \text{périmètre de la base} \times \text{hauteur} + 2 \times \text{aire de la base}.$$

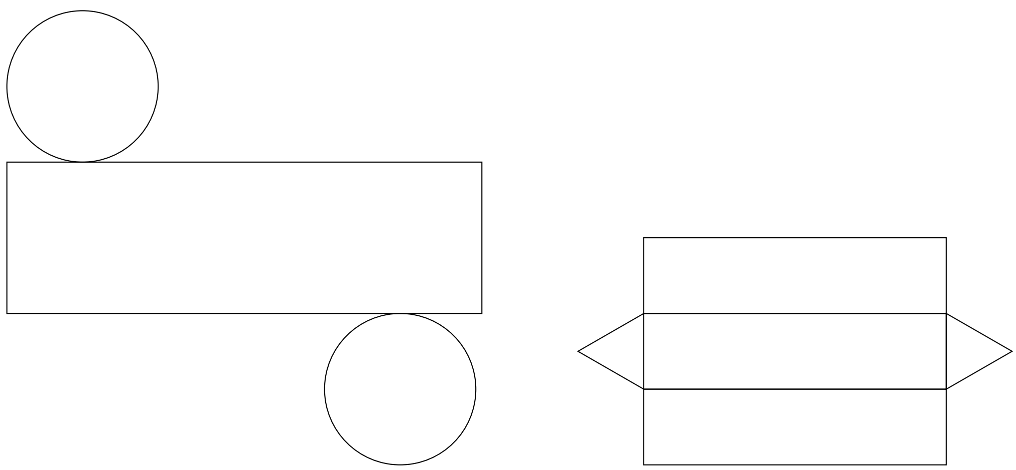
Propriété 16.19.
La section d'un cylindre de révolution ou d'un prisme droit avec un plan parallèle à la base est une figure identique à la base.

La section d'un prise droit (resp. d'un cylindre de révolution) avec un plan parallèle à une arête (resp. avec la hauteur) est un rectangle.

Démonstration. ♢ On peut utiliser le théorème de Thalès dans l'espace. □



On donne ci-dessous les patrons du cylindre droit et du prisme.

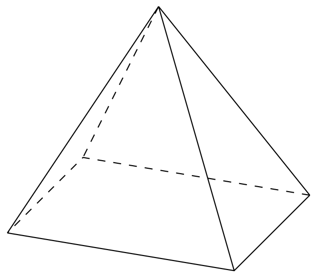


16.3.3 Pyramide

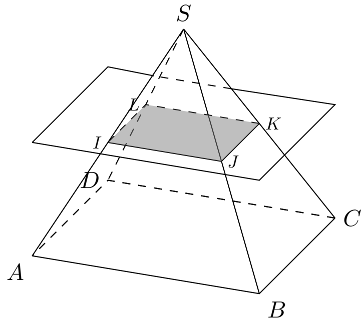
Définition 16.20.
Une *pyramide* est un solide à base qui peut être quelconque (rectangulaire, carré, ou triangulaire) et les faces latérales sont des triangles.

Propriété 16.21.
Si on note c le côté de la base et h la hauteur de la pyramide alors :

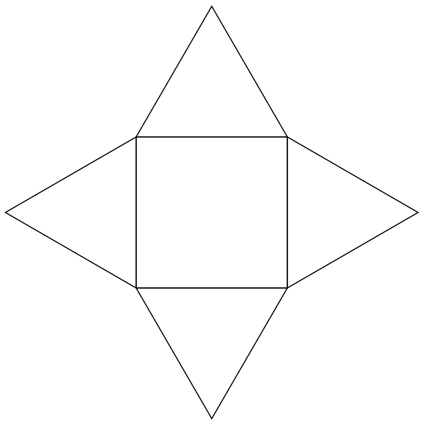
$$\mathscr{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{c^2 \times h}{3}$$



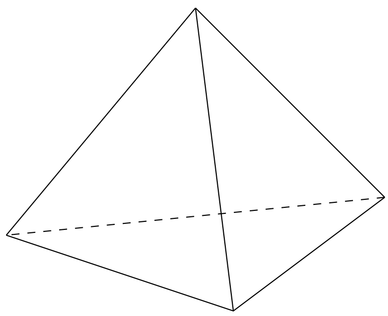
Propriété 16.22.
La section d'une pyramide avec un plan parallèle à la base est une réduction de la base de rapport $\dfrac{IJ}{AB}$.



On donne ci-dessous le patron d'une pyramide :



Définition 16.23. *Tétraèdre*
Un *tétraèdre* est une pyramide à base triangulaire.



Propriété 16.24.
Si on note h la hauteur du tétraèdre et B l'aire de sa base alors :

$$\mathscr{V} = \frac{B \times h}{3}.$$

On donne ci-dessous une démonstration de la formule de volume d'un tétraèdre qui peut se généraliser au pyramide.

Démonstration. ◊ Pour démontrer la formule du volume de la pyramide, on a recours au lemme suivant dont la démonstration est donnée dans [CNRS]

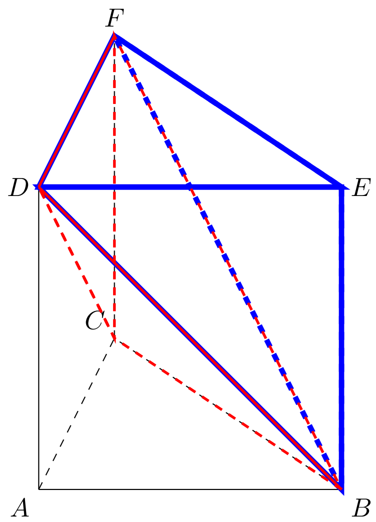
Lemme 16.25.
Deux tétraèdres qui ont des bases de même aire et des hauteurs égales ont des volumes égaux.

Soit $ABCD$ un tétraèdre de sommet D (on le notera $P_1 = (D, ABC)$). On peut construire un prisme droit de la manière suivante :

— tracer un triangle DEF isométrique à ABC tel que les droites (DA) et (AB) soient perpendiculaires (orthogonaux et sur un même plan) ;

— tracer les hauteurs (AD), (BE) et (CF).

On sait que son volume est le produit de l'aire de ABC par h (où h est la hauteur du prisme, comme de la pyramide).



On découpe alors le prisme en trois tétraèdre : le tétraèdre initiale P_1 et les tétraèdres bleue (qu'on note $P_2 = (B, DEF)$) et rose (qu'on note $P_3 = (B, CDF)$).

On peut appliquer le lemme aux tétraèdres P_1 et P_2 car les bases ABC et DEF sont identiques (ce sont deux triangles isométriques) puis aux tétraèdres P_1 et P_3 car les bases ACD et CDF ont même aire (ce sont deux moitiés d'un parallélogramme, donc elles ont même aire). □

Propriété 16.26. *Section du tétraèdre*
Si $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.

16.4 Solides de révolution

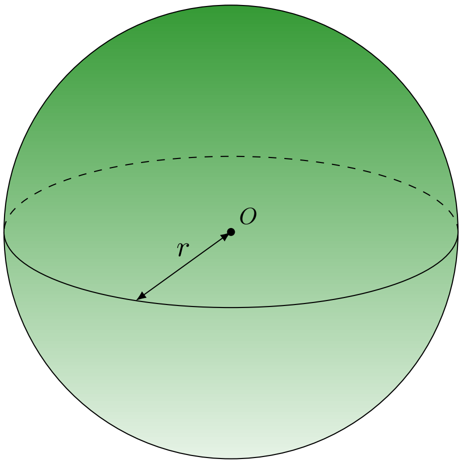
16.4.1 Définition

Définition 16.27.
Un *solide de révolution* est engendré par une surface plane fermée tournant autour d'un axe.

16.4.2 Boule et sphère

Définition 16.28. *Boule et sphère*

Une *boule* est un solide de révolution (on a fait tourner un cercle sur un axe). La *sphère* de centre O et de rayon r est le bord de la boule de même centre et de même rayon. C'est l'ensemble des points qui sont à distance r du point O.



Propriété 16.29.
En munissant l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $M(x, y, z)$ appartient à la sphère de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon R si et seulement si :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2.$$

Propriété 16.30.
Le volume d'une sphère de rayon R est :

$$\mathscr{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

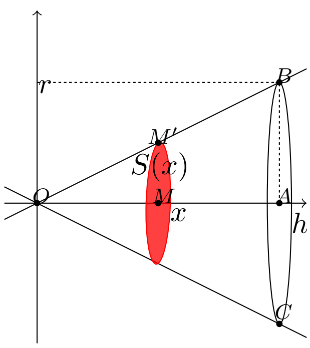
L'aire d'une sphère de rayon R est :

$$\mathscr{A} = 4\pi R^2.$$

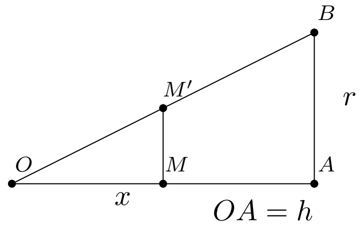
Remarque 16.31.
La formule du volume peut se démontrer de multiples façons selon le niveau : au collège en admettant le principe de Cavalieri, au lycée par une intégrale simple en supposant que le volume puisse s'obtenir en intégrant une surface le long d'un segment, et en BTS à l'aide d'intégrale triple.

Pour l'aire on peut tenter de justifier le fait qu'il suffise de dériver le volume (en supposant l'aire comme la limite d'un volume lorsque la hauteur tend vers 0). Une démonstration plus rigoureuse est possible en BTS grâce aux coordonnées sphériques et à une intégrale double.

Démonstration. $\diamondsuit$ On coupe le cône par un plan passant par la droite (OA) :



et on obtient le triangle OAB suivant :



D'après le théorème de Thalès :

$$MM' = \frac{rx}{h}$$

donc

$$S(x) = \pi \left(\frac{rx}{h}\right)^2.$$

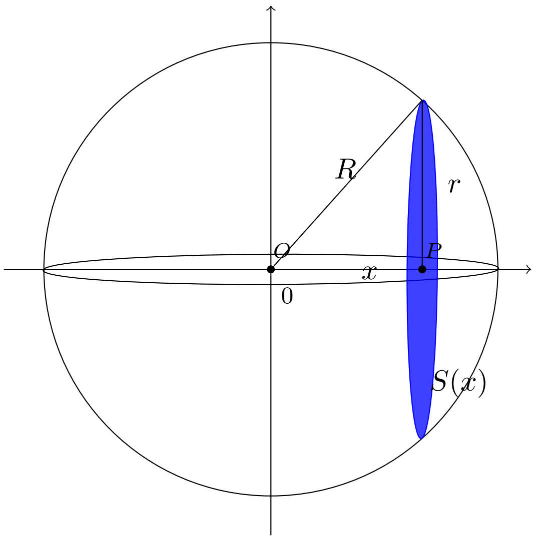
$$\mathscr{V} = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Soit :

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

On peut faire de même pour démontrer le volume de la pyramide. □

◊ *Une démonstration proposée en TS.*



Avec le théorème de Pythagore, on peut affirmer que le rayon du disque d'intersection est : $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où :

$$\mathscr{V} = \int_{-R}^{R} S(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = 2\pi \left(\pi R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

□

◊ *Une démonstration proposée en BTS.* On rappelle les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Or : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = R^2 \times |\sin\varphi|\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ (R^2 est le déterminant de la matrice jacobienne). Si on note $\mathscr{S}$ la sphère :

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3}\end{aligned}$$

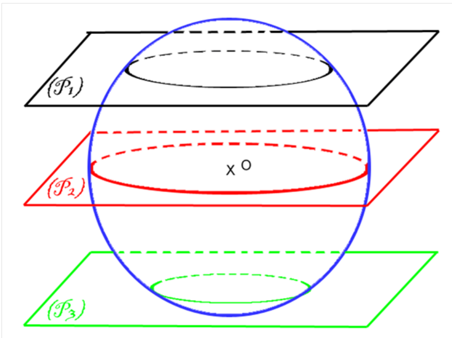
et pour l'aire, R ne varie pas :

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2\,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

□

Propriété 16.32.
L'intersection d'une sphère et d'un plan est soit :

- vide ;
- un point (on dit alors que le plan est tangent à la sphère) ;
- un cercle.



Démonstration. ◊
On peut toujours se ramener à un repère où l'équation du plan est $z = 0$. L'équation de la sphère dans ce repère est alors :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 4^2.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{S} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 - z_0^2 \end{cases}\end{aligned}$$

On a alors trois cas :

- $|R| < |z_0|$: pas de solution, l'intersection est vide.
- $|R| > |z_0|$: c'est exactement l'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $\sqrt{R^2 - z_0^2}$ dans le plan $z = 0$.
- $|R| = |z_0|$: $S = \{(x_0, y_0, 0)\}$, l'intersection est un point.

□

▶ **Exercice 16.33.**
Déterminer l'intersection de $\mathscr{P} : x + y - 2z = 9 = 0$ avec la sphère de centre $(6, 5, 4)$ et de rayon 6.

◊ *Solutions.* On calcule la distance de Ω, centre de la sphère au plan $\mathscr{P}$:

$$d(\Omega, \mathscr{P}) = \frac{|6 + 5 - 2 \times 4 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 6.$$

L'intersection est un cercle, de centre $M(x_M, y_M, z_M)$. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$. On a :

$$\overrightarrow{\Omega M} // \vec{n} \Leftrightarrow C \begin{cases} x_M = 6 + \lambda \\ y_M = 5 + \lambda \\ z_M = 4 - 2\lambda \end{cases}$$

et

$$\Omega M^2 = 6 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 6 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

donc $\lambda = \pm 1$. On a alors $M(7, 6, 2)$ ou $M(5, 4, 6)$. Puisque $M \in \mathscr{P}$, on doit avoir $x_M + y_M - 2z_M = 9$ donc $M(7, 6, 2)$ convient.

Pour avoir le rayon du disque, on utilise Pythagore :

$$r'^2 = 36 - 6 = 30 \Rightarrow r' = \sqrt{30}.$$

On en conclut que :

$$\mathscr{P} \cap \mathscr{S}_{\Omega,6} = \mathscr{C}_{(7,6,2),\sqrt{30}}.$$

□

16.5 Solides de Platon

Définition 16.34. *Solide de Platon*
Un *solide de Platon* est un polyèdre régulier, c'est-à-dire inscriptible dans une sphère et toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques.

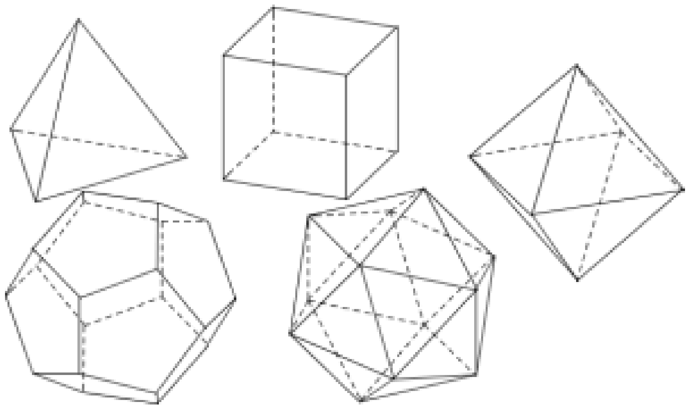
Propriété 16.35.
Chaque solide de Platon vérifie la formule d'Euler :

$$F + S = A + 2$$

avec F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets.

Théorème 16.36.
Il y a 5 solides de Platon :

1. l'icosaèdre qui est composé de 20 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 12 sommets et 30 arêtes ;
2. le dodécaèdre qui est composé de 12 faces (qui sont des pentagones réguliers), 20 sommets et 30 arêtes ;
3. l'octaèdre qui est composé de 8 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 6 sommets et 12 arêtes ;
4. le cube qui est composé de 6 faces (qui sont des carrés), 8 sommets et 12 arêtes ;
5. le tétraèdre qui est composé de 4 faces (qui sont des triangles équilatéraux), 4 sommets et 6 arêtes.



Démonstration. ◊ On montre qu'il y a cinq et seulement cinq solides de Platon. On considère un polyèdre régulier et on note s le nombre de sommets, f le nombre de faces et a le nombre d'arêtes du polyèdre. On note aussi q le nombre de côtés du polygone régulier qui constitue la face du polyèdre et p le nombre de faces qui aboutissent chacun de ses sommets. On a alors : $fq = 2a$ et $sp = 2a$. Il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} s - a + f = 2 \\ fq = 2a \\ sp = 2a \end{cases} \qquad \text{d'où } s = \frac{4q}{2p+2q-pq}, \quad a = \frac{2pq}{2p+2q-pq}, \quad f = \frac{4p}{2p+2q-pq}.$$

On recherche alors tous les couples d'entiers (p, q) vérifiant $p \geqslant 3$, $q \geqslant 3$ et $2p + 2q - pq > 0$ et on en obtient exactement 5 :

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3),\ (3,5),$$

desquels on déduit les triples (s, a, f) correspondants :

$$(4,6,4),\ (6,12,8),\ (8,12,6),\ (12,30,20),\ (20,30,12).$$

□

LEÇON

17

PÉRIMÈTRES, AIRES, VOLUMES.

Préambule

Niveau : transversal

Prérequis : intégrales, géométrie dans l'espace, notion de géométrie, figures usuelles

Références :

[1] M. CUAZ, *Géométrie dans l'espace, solides de l'espace.* [url].

[2] Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Solide géométrique.* Wikipédia.

[3] T. EVEILLEAU, *Les solides de Platon.* [url].

[4] S. DELAUNAY, *M302 : Cours de Géométrie I.* 2009-2010.

[5] C. BOULONNE, *Notes de cours, M103 : Fondements de l'analyse 2.* 2006-2007.

[6] Y. MONKA, *Calculs de périmètres.* Académie de Strasbourg. [url]

[7] G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths 1re S.* Bordas. Programme 2001.

[8] UNKNOWN, *Dissections de polygones, la construction de Henry Ernest Dudeney (1857 - 1930).* [url]

[9] Mathématiques Internet Aix Marseille, *Calculs d'aires par découpage.* [url] .

[10] Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Médiane (géométrie).* Wikipédia.

[11] APMEP, *Démontrer par les aires.* Journée régionale de Grenoble. 17 mars 2004.

[12] Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Théorème de Pick.* Wikipédia.

17.1 Périmètres

Définition 17.1.
Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour. Pour un polygone, c'est la somme des longueurs de ses côtés.

17.1.1 Unités de longueur

Définition 17.2.
La longueur est la mesure d'une distance. Son unité est le mètre, notée m.

kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 km = 1000 m	1 hm = 100 m	1 dam = 10 m	1 m	1 dm = 0,1 m	1 cm = 0,01 m	1 mm = 0,001 m

▶ **Méthode 17.3.** *Conversion d'unités*
Pour passer d'une sous-unité à la sous-unité supérieure, on divise par 10.
Pour passer d'une sous-unité à la sous-unité inférieure, on multiplie par 10.

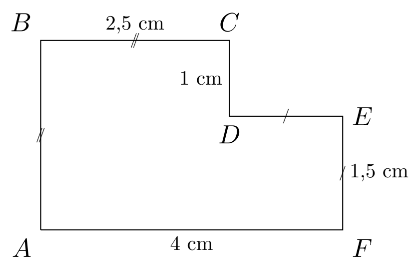
Exemple 17.4.

5,6 m = 560 cm   25,8 km = 25800 m   328 dm = 3,28 dam

Propriété 17.5.
Comme le périmètre est le calcul d'une longueur, l'unité utilisée est le mètre.

17.1.2 Calculer le périmètre d'une figure

Exemple 17.6.
Soit un pentagone $ABCDEF$ tel que $AB = BC = 2{,}5$ cm, $CD = 1$ cm, $DE = EF = 1{,}5$ cm et $AF = 4$ cm.



On calcule son périmètre :

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= AB + BC + CD + DE + EF + AF\\ &= 2{,}5 + 2{,}5 + 1 + 1{,}5 + 1{,}5 + 4\\ &= 13\text{cm}.\end{aligned}$$

On donne le périmètre de quelques figures usuelles.

Propriété 17.7.
1. Le périmètre d'un carré de côté c est $\mathscr{P} = 4 \times c$.
2. Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est $\mathscr{P} = 2 \times (L + \ell)$.
3. Le périmètre d'un losange de côté c est $\mathscr{P} = 4 \times c$.
4. Le périmètre d'un triangle équilatéral de côté c est $\mathscr{P} = 3 \times c$.
5. Le périmètre d'un triangle de côté a, b et c est $\mathscr{P} = a + b + c$.

17.1.3 Longueur (circonférence) d'un cercle

Une activité de découverte

— Prendre un rouleau de ruban adhésif et mesurer son diamètre D. On trouve (par exemple) $D = 6{,}1$ cm.
— Faire une marque au niveau de l'extrémité du ruban.
— Dérouler le ruban et couper au niveau de la marque.
— Coller le ruban ainsi découpé sur une feuille de papier et mesurer sa longueur. On trouve (dans cet exemple) $L = 19{,}2$ cm.
— Diviser L par D : $\frac{L}{D} = 3{,}1475$.

Recommencer plusieurs fois l'expérience avec des rouleaux de diamètres différents. Le rapport $\frac{L}{D}$ semble être égal quelque soit le diamètre du rouleau. Ce rapport s'appelle Pi.

Note historique

Le nombre Pi se note « π ». Son écriture est infinie. Les premières décimales sont :

$$\pi \approx 3{,}1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\ 5820974944\ldots$$

Dans la pratique, on prend : $\pi \approx 3{,}14$.

Archimède (-285 ; -212), savant de Syracuse, trouva $\pi \approx 3{,}14185$ pour valeur approchée de π. Ce qui fut remarquable pour une époque où on ne connaissait pas encore les méthodes de calculs posés et où les figures se dessinaient souvent sur le sable.

Formules et exemple

Exemple 17.8.
On veut calculer la longueur d'un cercle de diamètre 5 cm. Le rapport $\frac{L}{D}$ est égal au nombre π. D'après la définition du quotient $\frac{L}{D} \times D = L$. Ainsi la longueur du cercle est égale au produit de π par le diamètre :

$$\pi \times 5 \approx 3{,}14 \times 5 \approx 15{,}7 \text{ cm}.$$

La longueur d'un cercle de diamètre 5 cm est environ de 15,7 cm.

Propriété 17.9.
La circonférence L d'un cercle est donnée par la formule suivante :

$$L = \pi \times D$$

où $\pi \approx 3{,}14$ et D est le diamètre du cercle.

On peut aussi écrire :

$$L = 2 \times \pi \times R$$

où $\pi \approx 3{,}14$ et $R = \frac{D}{2}$ le rayon du cercle.

Exemple 17.10.
On veut calculer la longueur L d'un quart de cercle de diamètre 4 cm. On peut calculer la longueur L' du cercle de diamètre 4 cm par la formule précédente :

$$L = 4 \times \pi \approx 4 \times 3{,}14 \approx 12{,}56 \text{ cm}.$$

Or : $4L' = L$ d'où $L' = \frac{L}{4} = \frac{4 \times \pi}{4} = \pi \approx 3{,}14$ cm.

17.2 Aires

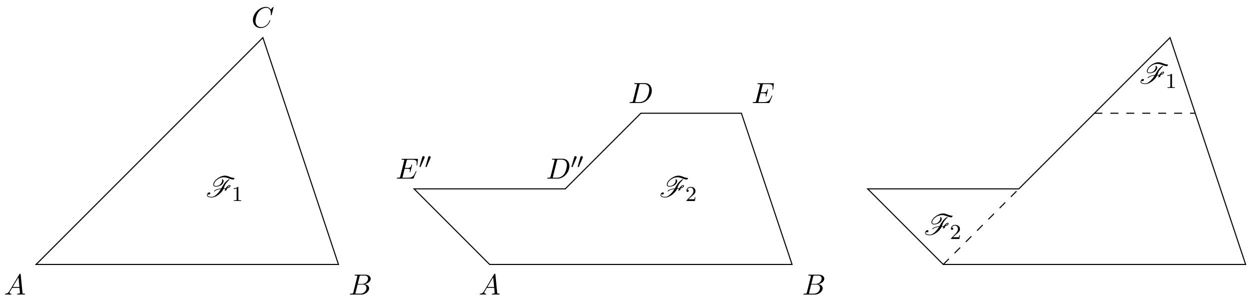
Définition 17.11.
L'aire est une grandeur relative à certaines figures du plan ou des surfaces en géométrie dans l'espace. C'est l'« intérieur » de la figure.

17.2.1 Comparer les aires

Egalité d'aires

Définition 17.12.
On dit que deux figures ont la même aire si en découpant l'une d'entre elle, on peut recomposer l'autre.

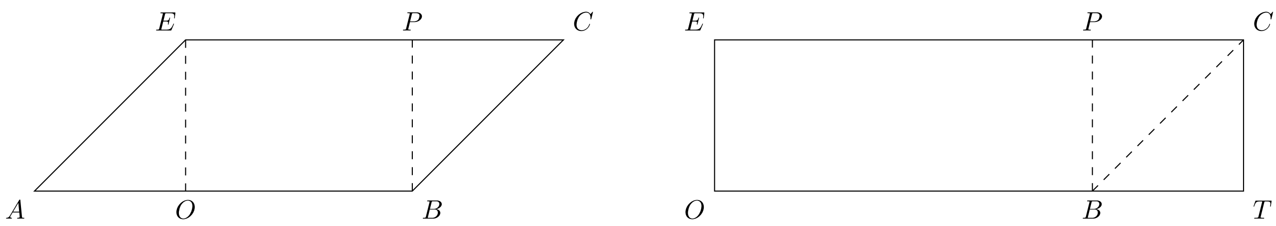
Exemple 17.13.
La figure $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ ont la même aire car si on découpe le triangle $AE''D''$ de la figure $\mathscr{F}_2$ et qu'on le place sur l'arrête $[DE]$ de sorte que $[DE]$ et $[D''E'']$ coïncide, on retrouve la figure $\mathscr{F}_1$.



Transformer l'aire d'une figure en celle d'un rectangle

Proposition 17.14.
On peut toujours découper un polygone en un rectangle de même aire.

Exemple 17.15.
Dans le parallélogramme $ABCE$, on a découpé le triangle AEO qu'on a collé sur le segment $[CB]$. On obtient ainsi le rectangle $OECT$.



Proposition 17.16. *Découpage de Dudeney (1902)*
On peut découper un triangle équilatéral en quatre morceaux pour qu'il puisse former un rectangle.

Démonstration. ♢ On va expliciter la construction de Dudeney. On se donne un triangle ABC équilatéral de côté 2. On note E et D les milieux de $[AC]$ et de $[AB]$. On construit I sur $[BC]$ tel que $EI^4 = 3$. Pour cela,

— On construit M le symétrique de A par rapport à (BC). Ainsi $AM = 2\sqrt{3}$.

— On construit le cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre M passant par B, donc de rayon 2. On note P l'intersection de la droite (AM) et du cercle $(\mathscr{C}_2)$, P se trouvant à l'extérieur du triangle ABC.

— On note Q le milieu de $[AP]$ et on construit $(\mathscr{C}_1)$ le cercle de centre Q passant par A ($(\mathscr{C}_1)$ a pour rayon $1+\sqrt{3}$).

— On note O l'intersection du cercle $(\mathscr{C}_1)$ et de la parallèle à (BC) passant par M. On a alors $OM = 2\sqrt[4]{3}$.

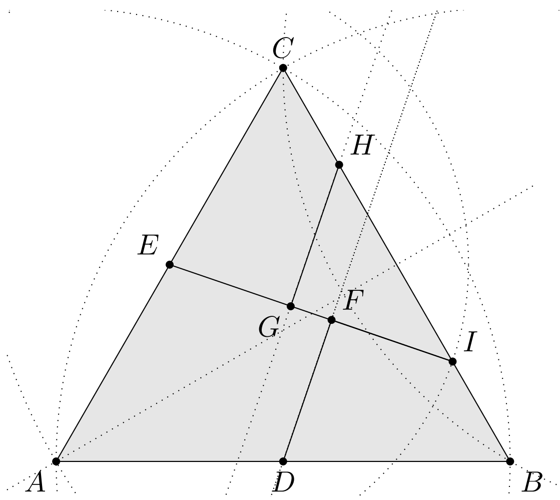
— Soit N le milieu de $[OM]$ alors MN est la longueur EI cherchée.

On note F le projeté orthogonal de D sur $[EI]$ et G le point de $[EI]$ tel que $EG = IF$. H est l'antécédent sur $[BC]$ de G par projection orthogonale sur (EI).

On donne une suite d'instructions à faire sur Geogebra pour réaliser la construction précédente :

```
 A = (0,0)
B = (2,0)
Cercle[A,2]
```

```
Cercle[B,2]
C = Intersection[c,d,1]
Polygone[A,B,C]
D = MilieuCentre[A,B]
E = MilieuCentre[A,C]
# Construction du point I
M = Symétrie[A,a]
C_2 = Cercle[M,2]
Droite[A,M]
P = Intersection[e,C_2,2]
Q = MilieuCentre[A,P]
C_3 = Cercle[Q,A]
Droite[M,a]
O = Intersection[C_3,f,1]
N = MilieuCentre[O,M]
Segment[M,N]
Cercle(E,g)
I = Intersection(a,h)
# Fin de la construction du point I
Segment[E,I]
Perpendiculaire[D,h]
F = Intersection[i,h]
Segment[I,F]
Cercle(E,j)
G = Intersection[h,p]
Perpendiculaire[G,h]
H = Intersection[a,l]
Segment[G,H]
Segment[D,F]
```



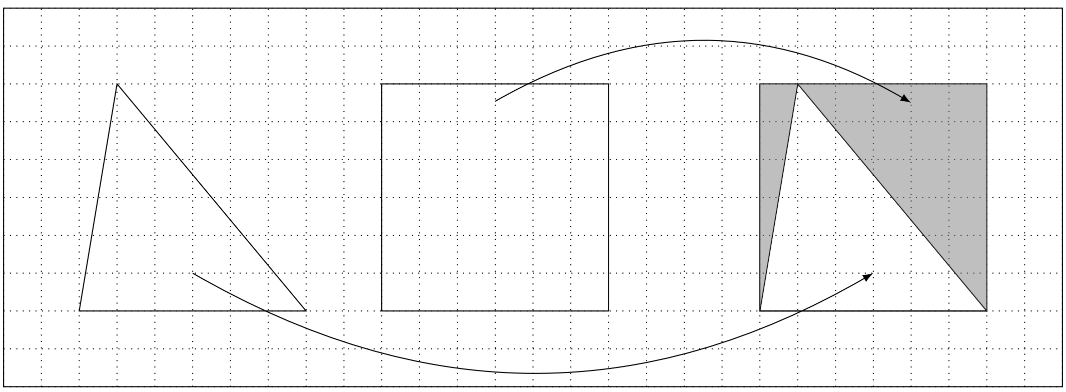
□

Inégalité

Définition 17.17.
On dit que deux figures n'ont pas la même aire si en essayant de découper une des figures pour la reconstituer en l'autre figure, les deux surfaces ne sont pas superposables [a].

a. c'est-à-dire qu'une des deux surfaces « dépassent » l'autre

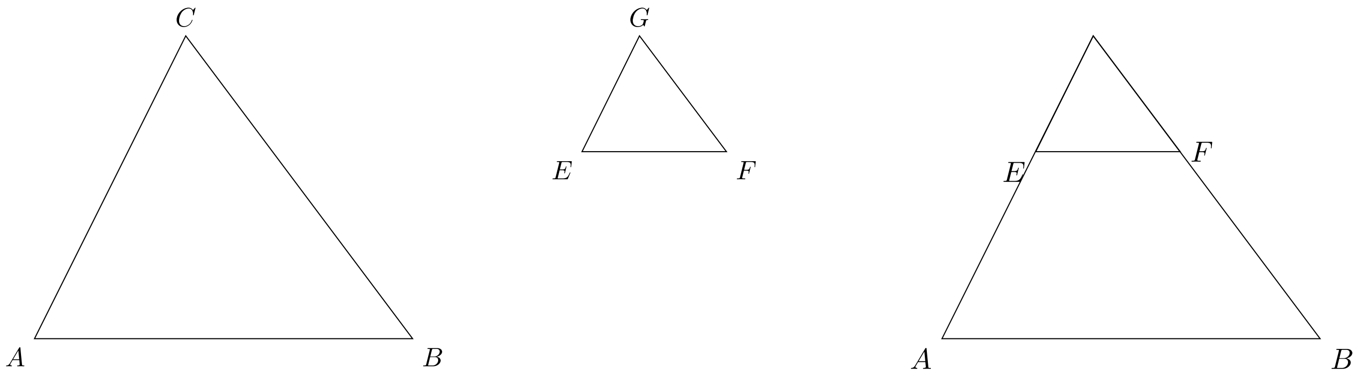
Exemple 17.18.
Dans la figure ci-dessous, les deux figures n'ont pas la même aire car si on les superpose, la surface d'une des deux figures dépassent l'autre.



Les multiples

Définition 17.19.
Soit A_1 (resp. A_2) l'aire de deux polygones P_1 (resp. P_2). On dit que les deux aires sont multiples l'un de l'autre s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A_1 = kA_2$.

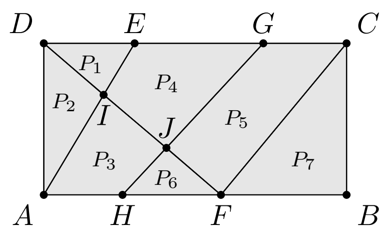
Exemple 17.20.
La figure ci-dessous nous montre deux figures dont les aires sont multiples.



Les partages

Définition 17.21.
Soit un polygone P et A son aire. On dit qu'on partage le polygone P en des polygones $(P_1, \dots, P_n)$ avec aires $(A_1, \dots, A_n)$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $P_i \subset P$ (les polygones P_i sont dans le polygone P) et il existe $0 < k_i < 1$, tels que $A_i = k_i A$ et $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.

Exemple 17.22.
Soit $ABCD$ le rectangle de la figure ci-dessous. On dit que $(P_1, \dots, P_7)$ partage le rectangle.



17.2.2 Mesurer une aire

Principe

Définition 17.23. *Aire d'une surface*
L'aire d'une surface est la mesure de sa surface, dans une unité d'aire donnée.

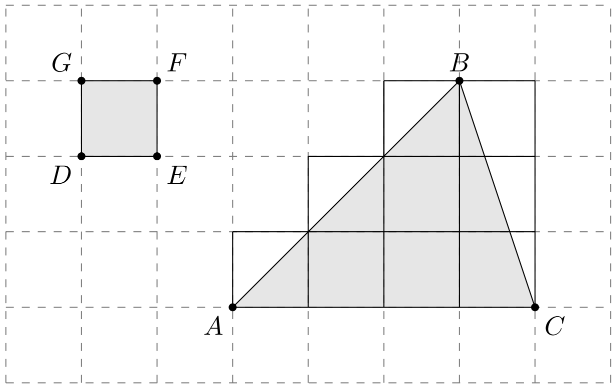
Définition 17.24.
Mesurer une aire d'un polygone, c'est compter le nombre de carré unité (on précisera l'unité plus tard) qui sont inscrit dans ce polygone.

Méthode

Définition 17.25.
On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, il faut le partager avec autant de carré unité que l'on peut (quitte à ce que la surface de ce carré dépasse la figure).

Définition 17.26.
On se donne un polygone et un carré unité. Pour calculer l'aire de ce polygone, on peut le découper pour en faire un rectangle et ensuite compter le nombre de carré unité inscrit dans le rectangle.

Exemple 17.27.
L'aire du triangle ABC de la figure ci-dessous est 6 car en le découpant, on peut former un rectangle qui contient 6 carré unité $DEFG$.



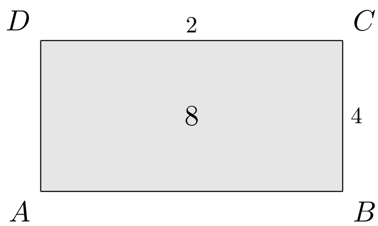
17.2.3 Calculer une aire

Aire d'un rectangle

Définition 17.28. *Aire d'un rectangle*
Un rectangle de longueur L et de largeur l a pour aire $L \times l$.

Démonstration. ◊ Soit un rectangle de longueur L et de largeur l. Sur la longueur, on peut inscrit L carré unité et sur la largeur, l carré unité. Donc, le nombre de carrés unité qu'on peut inscrire dans le rectangle est Ll et ainsi, l'aire du rectangle est Ll. □

Exemple 17.29.
L'aire du rectangle de la figure ci-dessous est de 8.



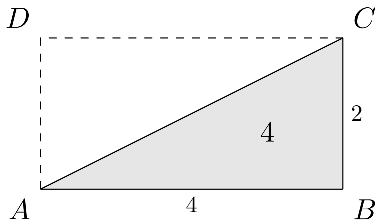
Aire d'un triangle rectangle

Définition 17.30.
L'aire d'un triangle rectangle de base b et de hauteur h est $\dfrac{b \times h}{2}$.

Démonstration. ◊ Un triangle rectangle de base b et de hauteur h ($b > h$) est un rectangle de longueur b et de largeur h qu'on a coupé en deux (l'hypoténuse du triangle rectangle correspond à une des diagonales du rectangle). Donc, comme l'aire du rectangle est $b \times h$, l'aire du triangle rectangle est $\frac{1}{2}(b \times h)$. □

Exemple 17.31.
L'aire d'un triangle rectangle de base 4 et de hauteur 2 est :

$$A = \frac{1}{2}(4 \times 2) = 4.$$

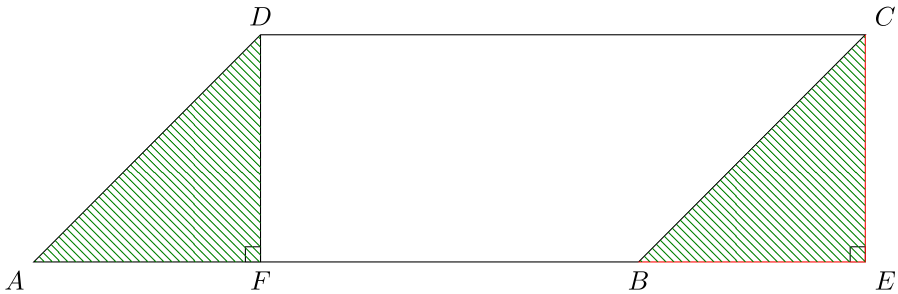


Aire des polygones

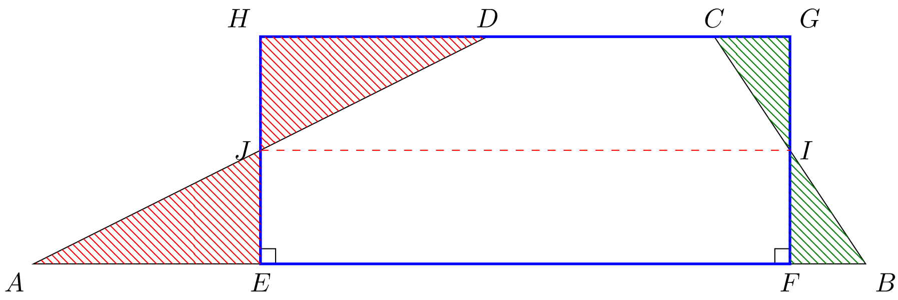
On montre dans l'exemple suivant comment transformer certains polygones en rectangle pour pouvoir calculer leur aire.

Exemples 17.32.

1. L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. Soit $ABCD$ un parallélogramme, E et F les projections orthogonales de C et D sur (AB). Le rectangle $FECD$ a même aire que le parallélogramme, car les triangles ADF et BCE sont isométriques. D'où
$$\text{Aire}(ABCD) = AB \times DF = a \times h \quad \text{où } a = AB = CD \text{ et } h = DF = CE.$$



2. La surface d'un trapèze a pour mesure le produit de la moyenne des bases par sa hauteur. Si $b = AB$, $b' = CD$ et $h = HE$ alors
$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{b + b'}{2} \times h.$$
Soit $ABCD$ un trapèze de grande base $[AB]$, et de petite base $[CD]$ parallèle à (AB) et I et J les milieux des côtés $[BC]$ et $[AD]$. D'après la propriété de Thalès, IJ est égal à la moyenne des bases. Soient E et F les projections orthogonales de J et I sur (AB) ainsi que G et H les projections orthogonales de I et J sur (CD). Le rectangle $EFGH$ a même aire que le trapèze $ABCD$ car les triangles rectangles IGC et IFB sont isométriques, de même que les triangles JHD et JEA.



Unités

Définition 17.33.
L'unité légale de mesure d'aire est le mètre carré (m^2).

Remarques 17.34.
1. Si les longueurs du polygone sont en cm alors l'aire du polygone s'exprime en cm^2.
2. On peut exprimer aussi l'aire en ares et hectares (ce sont les mesures agraires). On a ainsi :

$$1 \text{ are} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2.$$
$$1 \text{ hectare} = 1 \text{ hm}^2 = 10000 \text{ m}^2.$$

Proposition 17.35. *Conversion d'unités d'aires*
Passer d'une unité supérieure d'aire, c'est multiplier par 100 l'unité d'aire utilisée.

Pour changer d'unités d'aire, on a alors besoin du tableau de conversions des unités d'aires :

Exemple 17.36.

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			5	2	0								
							0	0	4	0	3		

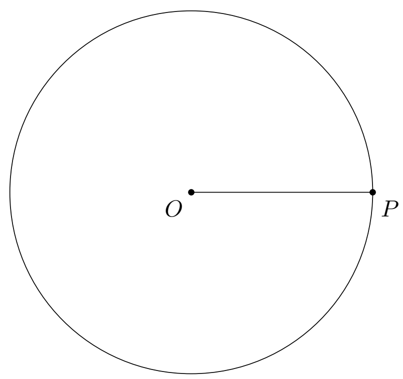
Ainsi,

$$520 \text{ ares} = 520 \text{ dam}^2 = 5{,}2 \text{ hm}^2 = 5{,}2 \text{ hectares}.$$
$$0{,}0403 \text{ m}^2 = 4{,}03 \text{ dm}^2 = 403 \text{ cm}^2.$$

Aire d'un cercle (ou de disque)

Définition 17.37.
Le nombre π est défini comme le rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre.

Définition 17.38.
L'aire du disque de rayon R est $\pi \times R^2$.



L'aire du cercle de rayon 3 cm est 9π cm^2

17.3 Volumes, aires latérales

Définition 17.39. *Volume*

On appelle *volume* la portion de l'espace occupée par un solide. Elle est mesurée (généralement) en m^3 (ou ses sous-unités).

Définition 17.40. *Aire latérale*

On appelle *aire latérale* (ou surface latérale) du solide, la surface délimitant ce solide privée de sa (ou ses) base(s). Elle est mesurée (généralement) en m^2 (ou ses sous-unités).

17.3.1 Parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)

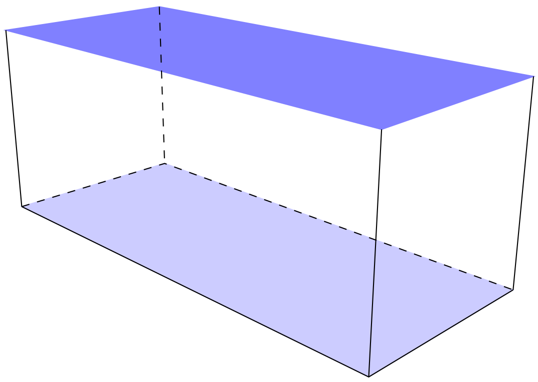
Propriété 17.41.
Soit un pavé droit de longueur L, de largeur ℓ [a] et de hauteur h. Alors son volume $\mathscr{V}$ est donnée par la formule :

$$\mathscr{V} = L \times \ell \times h.$$

L'aire latérale $\mathscr{A}$ de ce pavé droit est donnée par la formule :

$$\mathscr{A} = 2h \times (L + \ell)$$

a. La base de ce pavé droit est un rectangle de longueur $L \times \ell$



Cas particulier d'un cube :

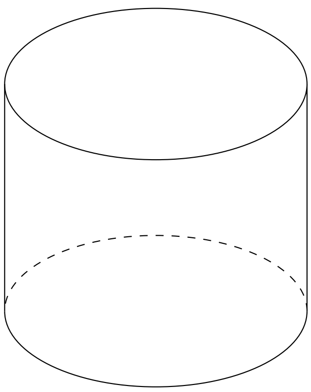
Propriété 17.42.
Soit un cube dont les faces sont des carrés de côté a. Le volume $\mathscr{V}$ du cube est donnée par la formule suivante :

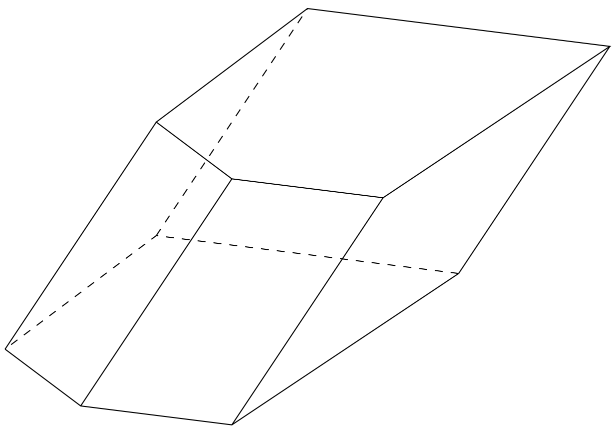
$$\mathscr{V} = a^3.$$

L'aire latérale $\mathscr{A}$ de ce cube est donnée par la formule suivante :

$$\mathscr{A} = 4a^2.$$

17.3.2 Prises et cylindres





Propriété 17.43.

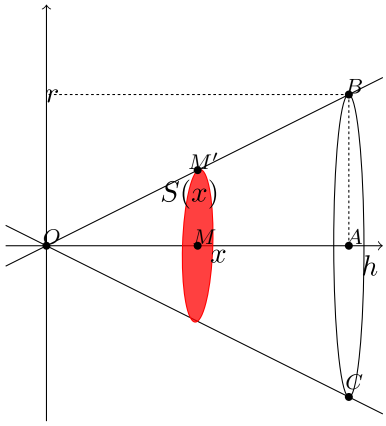
— Le volume du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathscr{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

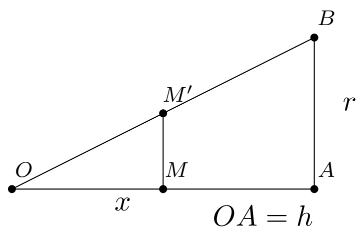
— L'aire du prisme et du cylindre est égal à :

$$\mathscr{A} = \text{périmètre de la base} \times \text{hauteur}.$$

Démonstration. ◊ On coupe le cône par un plan passant par la droite (OA) :



et on obtient le triangle OAB suivant :



D'après le théorème de Thalès :

$$MM' = \frac{rx}{h}$$

donc

$$S(x) = \pi = \left(\frac{rx}{h}\right)^2.$$

$$\mathscr{V} = \int_0^h \frac{\pi}{r^2} h^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Soit :

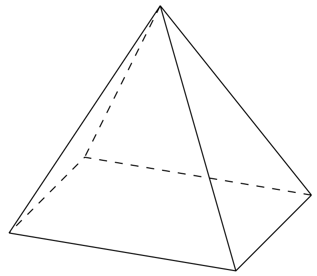
$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

On peut faire de même pour démontrer le volume de la pyramide. □

17.3.3 Pyramide

Propriété 17.44.
Si on note c le côté de la base et h la hauteur de la pyramide alors :

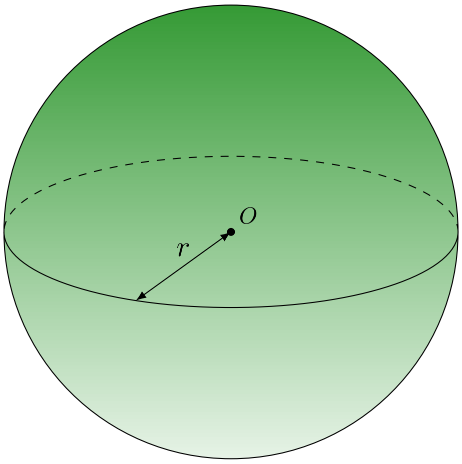
$$\mathscr{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{c^2 \times h}{3}$$



Propriété 17.45.
Si on note h la hauteur du tétraèdre et B l'aire de sa base alors :

$$\mathscr{V} = \frac{B \times h}{3}.$$

17.3.4 Solides de révolution



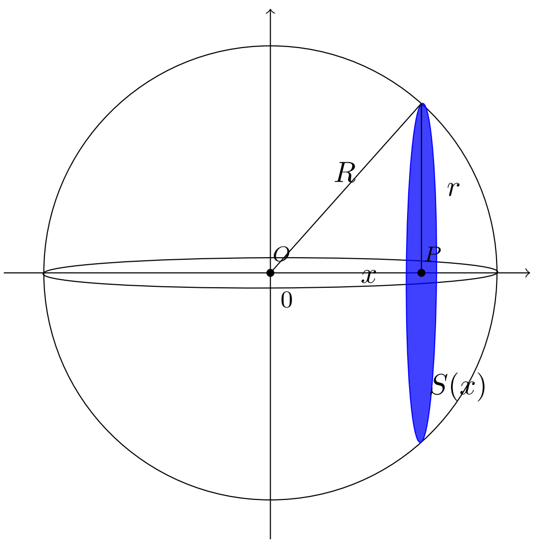
Propriété 17.46.
Le volume d'une sphère de rayon R est :

$$\mathscr{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

L'aire d'une sphère de rayon R est :

$$\mathscr{A} = 4\pi R^2.$$

$\Diamond$ *Une démonstration proposée en TS.*



Avec le théorème de Pythagore, on peut affirmer que le rayon du disque d'intersection est : $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'où :

$$\mathscr{V} = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(\pi R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

□

◊ *Une démonstration proposée en BTS.* On rappelle les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Or : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = R^2 \times |\sin\varphi|\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ (R^2 est le déterminant de la matrice jacobienne). Si on note $\mathscr{S}$ la sphère :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

et pour l'aire, R ne varie pas :

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2\,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

□

17.4 Compléments

17.4.1 Intégrale et aire

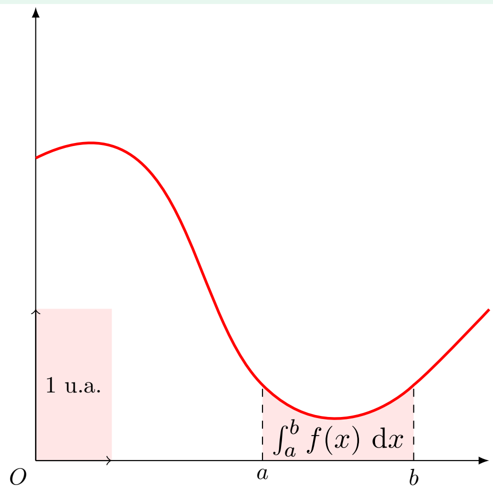
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 17.47. *Aire sous la courbe*

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. *L'aire sous la courbe* $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ est l'aire du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit *l'intégrale* (ou somme) de a à b de f.

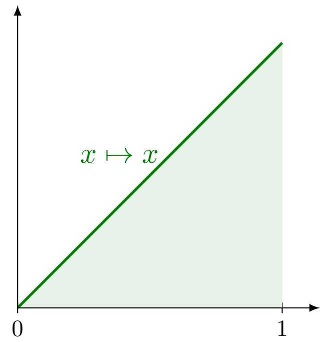
Remarques 17.48.

1. Le domaine $\mathscr{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

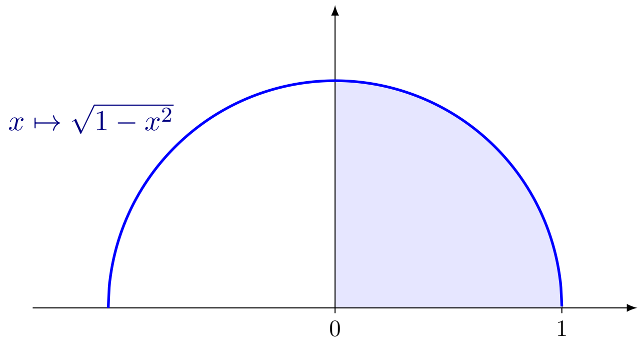


Exemples 17.49.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.



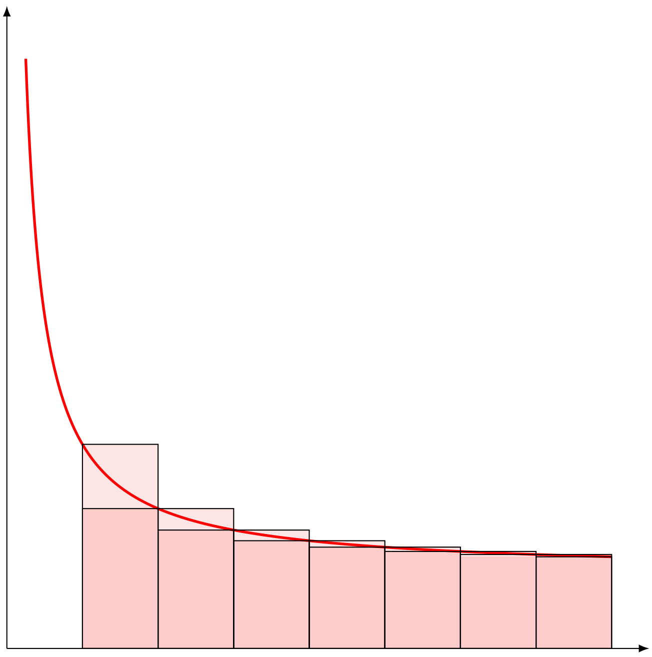
$\displaystyle\int_0^1 x\ \mathrm{d}x$



$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$

Propriété 17.50.
Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$



Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur $\dfrac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a

$$u_n \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant v_n.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ diminue.

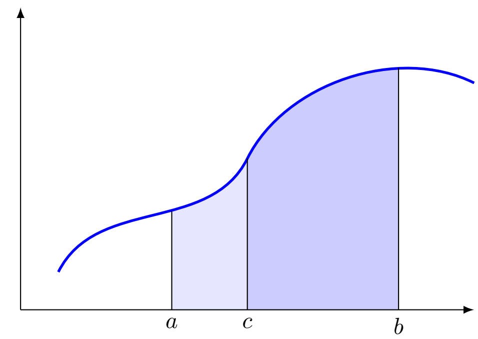
Remarques 17.51.

1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a,b]$.
2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a,b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

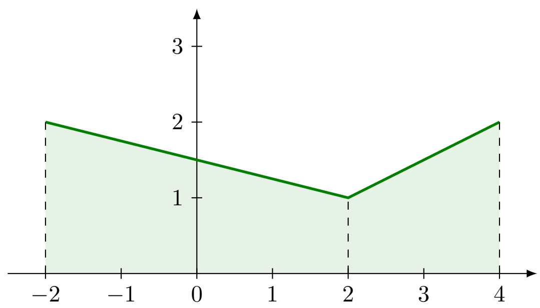
Propriété 17.52. *Relation de Chasles*
Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a;c]$ et $[c;b]$.



Exemple 17.53.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Alors :

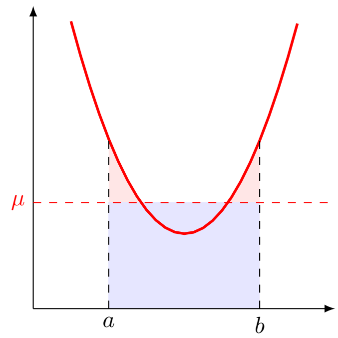
$$\int_{-1}^{2} f(x) = \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

Définition 17.54. *Valeur moyenne*
Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a;b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.

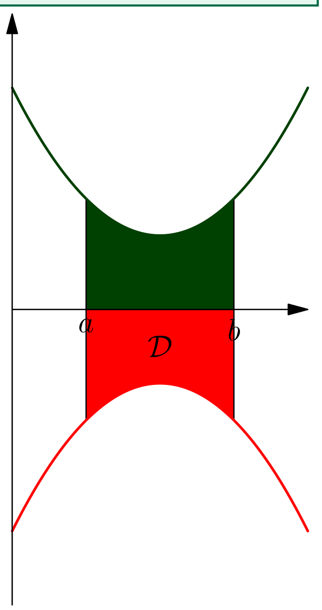


Définition 17.55.

Soit une fonction f continue et *négative* sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à *l'opposé* de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété 17.56.
Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$\Diamond$ *Démonstration de la propriété 17.56.* $\mathscr{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 17.55, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Propriété 17.57.
Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a;b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ est égale à :

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 17.58.

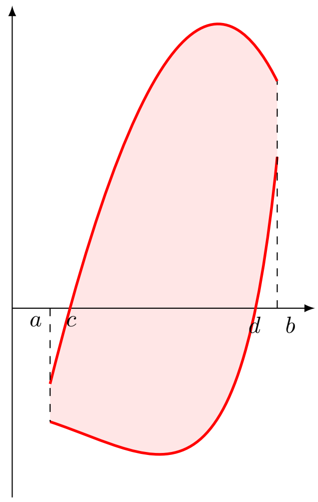
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$ est $-\dfrac{1}{3}$.

Propriété 17.59.
Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

◊ *Démonstration de la propriété 17.59.*

On découpe l'intervalle $[a;b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signe ou de signe contraire. Ainsi, dans la figure ci-contre, l'aire entre les deux courbes est :



— sur l'intervalle $[a;c]$:

$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

— sur l'intervalle $[c;d]$:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

— sur l'intervalle $[d;b]$:

$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

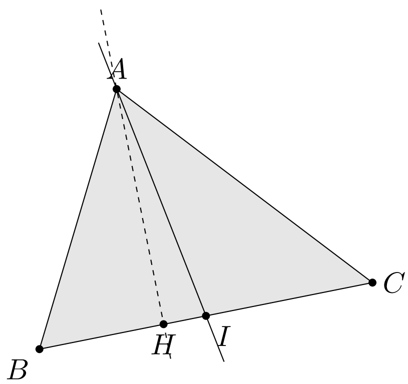
En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

pour la valeur de l'aire du domaine $\mathscr{D}$. □

17.4.2 Partage de la médiane

Théorème 17.60.
Soit ABC un triangle et (AI) la médiane issue de A. L'aire du triangle ABI est égale à l'aire du triangle ACI.

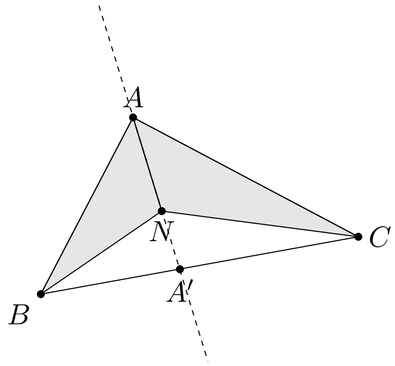


Démonstration. ◊ On considère les deux triangles ABI et ACI. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). Comme I est le milieu du segment $[BC]$, on a $BI = CI$. L'aire du triangle ABI est égale à $\dfrac{BI \times AH}{2}$. L'aire du triangle ACI est égale à $\dfrac{CI \times AH}{2}$. Comme $BI = CI$, ces deux aires sont égales.[a] □

[a]. Une autre façon élémentaire de le démontrer est de remarquer que ces deux triangles sont les moitiés de deux parallélogrammes de côté commun (AI) et translatés l'un de l'autre.

17.4.3 Théorème du chevron

Théorème 17.61.
Soit N un point intérieur au triangle ABC et A' le point d'intersection de la droite (AN) et du segment $[BC]$. Alors le rapport des aires des triangles ANB et de ANC est égal au rapport des distances BA' et CA'.



Pour démontrer le théorème 17.61, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 17.62.
Si deux triangles ont un sommet commun A et des bases $[BC]$ et $[CC']$ portés par une même droite, alors le rapport de leurs aires est égal au rapport des longueurs de leurs bases.

◊ *Démonstration du lemme 17.62.* On doit étudier trois cas :

1. Si l'une des bases est un multiple entier de l'autre, on applique plusieurs fois le partage de la médiane.
2. Si les deux bases sont commensurables (c'est-à-dire sont multiples d'une même grandeur prise comme unité), on applique deux fois le premier cas.
3. Si les deux bases sont incommensurables, on obtient le résultat par passage à la limite (tout irrationnel peut être considéré comme la limite d'une suite de rationnels). Il y a ici un « saut » incontournable (le même celui que l'on fait quand on généralise la formule de l'aire d'un rectangle : aire = base × hauteur).

□

◊ *Démonstration du théorème du chevron.* On applique le lemme 17.62 aux triangles $AA'B$ et $AA'C$ et ensuite, aux triangles ANB et ANC. □

17.4.4 Formule de Pick

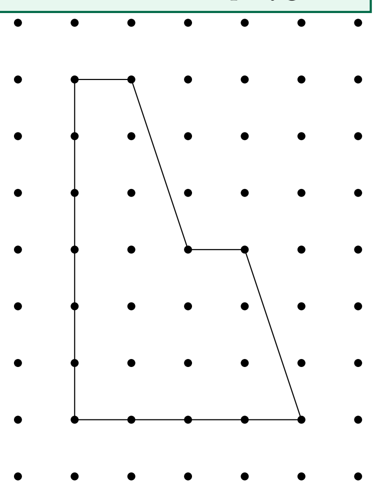
Théorème 17.63.
Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants (c'est-à-dire des points de coordonnées entières) tel que tous ses sommets soient des points de la grille. L'aire A de ce polygone est donnée par :

$$A = i + \frac{1}{2}b - 1,$$

où i est le nombre de points intérieurs du polygone et b le nombre de points du bord du polygone.

Exemple 17.64.
Dans la figure ci-contre, nous avons $i = 9$ et $b = 14$. Ainsi, l'aire du polygone est :

$$A = 9 + \frac{14}{2} - 1 = 9 + 7 - 1 = 15.$$



LEÇON

18 Exemples de résolution de problèmes de géométrie plane à l'aide des vecteurs.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Lycée

Prérequis : Définition de vecteurs, opérations sur les vecteurs, colinéarité et applications, coordonnées de vecteurs, produit scalaire vectoriel.

Références :

[1] C. Boulonne, *Dossiers CAPES, banque de documents pour l'épreuve disciplinaire appliquée (Écrit II).* [url]

[2] Manuel Sesamath, *Seconde*, Magnard 2019. [url]

[3] S. Reingbach, *Vecteurs : exercices de maths en 2de en PDF – Seconde.*, Maths-PDF.fr. [url]

[4] Manuel Sesamath, *Première Spécialité*, Magnard 2019. [url]

Note personnelle : « un problème se caractérise par un état initial (la « situation-problème »), un objectif à atteindre (la « solution »), et des moyens à disposition pour atteindre cet objectif (des règles mathématiquement valides dont découlent des stratégies de résolution). La notion de problème suppose également celle d'obstacle : à la différence d'une activité automatisée ou des exercices d'entraînement, une personne face à un problème ne perçoit pas immédiatement un chemin de résolution. » (extrait du Rapport du Jury session 2022).

L'intitulé de l'annonce est assez flou sur les attendus du Jury. Est-ce que l'énoncé du problème peut faire explicitement référence à la notion de vecteur (problème signalé par un *) ou non ?

18.1 Construction et coordonnées de points

18.1.1 Parallélogramme

[2, 89 p 155]

18.1.2 Transformations

*[2, 107 p 157]

18.1.3 Utilisation du barycentre

*[2, 105 p 157] (construire le point M proposé par l'exercice)

18.2 Problèmes de parallélisme

[1, Dossiers CAPES 2012-03] [2, 108-109 p 157] *[3,28]

18.3 Problèmes d'alignement de points

[1, Dossiers CAPES 2015-13] [1, Dossiers CAPES 2014n-03] [1, Dossiers CAPES 2014n-14] [2, 99 p 156] *[2, 106 p 156] [3, 26]

18.4 Utilisation du produit scalaire

18.4.1 Orthogonalité

[1, Dossiers CAPES 2015-12] *[4, 101 p 239] [4, 115 p 240]

18.4.2 Équation de cercle

[1, Dossiers CAPES 2011-3C-04] [4, 119 p 260]

18.4.3 Applications à d'autres disciplines

*[2, 111 p 157] *[4, 108 p 240]

LEÇON

19

PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN.

Préambule

Niveau : première « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Spécialité »
Prérequis : géométrie vectorielle
Références :

[1] P. BRACHET, *Produit scalaire : Resumé de cours et méthodes.* [url]
[2] A. LIÉTARD, *Produit scalaire.* [url]
[3] M. CUAZ, *Produit scalaire.* [url]
[4] C. ROSSIGNOL, *Produit scalaire dans l'Espace.* Année scolaire 2014/2015. [url]

19.1 Produit scalaire dans le plan

19.1.1 Premières formules

Définition 19.1. *Produit scalaire*
On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right].$$

Remarque 19.2.
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème 19.3.
Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormée (c'est-à-dire $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormale) et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

◊ *Démonstration du théorème 19.3.* On a : $\vec{u}+\vec{v}=(x+x', y+y')$ et donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2.$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right]=xx'+yy'.$$

□

Exemple 19.4.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times 2+(-1)\times 6=6-6=0.$$

On dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

19.2 Quelques propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

Propriétés 19.5. *Propriété du produit scalaire, première partie*
1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{0}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{0}=0$
3. Pour tout réel k, $k\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Propriétés 19.6. *Propriété du produit scalaire, seconde partie*
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
6. $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$)
7. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ (cela signifie que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$)
8. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
9. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

◊ *Démonstration des propriétés 19.5-1, 19.5-3 et 19.5-4.* 1. D'après la définition du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]=\left[\|\vec{v}+\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right]=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$

3. On se donne un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$. On utilise la formule du théorème 19.3 :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})&=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)=x_1x_2+x_1x_3+y_1y_2+y_1y_3\\&=x_1x_2+y_1y_2+x_1x_3+y_1y_3=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}.\end{aligned}$$

4. De même,

$$\begin{aligned}(k\vec{u})\cdot\vec{v}&=kx_1x_2+ky_1y_2=kx_2x_1+ky_2y_1=\vec{u}\cdot(k\vec{v})\\&=kx_1x_2+ky_1y_2=k(x_1x_2+y_1y_2)=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

□

Propriété 19.7.
Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Remarque 19.8.
Si on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

19.3 Autres expressions du produit scalaire

Théorème 19.9.
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Propriété 19.10.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls *colinéaires* :

1. S'ils ont même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
2. S'ils ont sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple 19.11.
Si $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ et $\|\vec{u}\| = 2$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 = 6$.

Figure 19.1 – Projection orthogonale du vecteur v sur une droite horizontale

Propriété 19.12.
Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si on note $p(\vec{v})$, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite portant $\vec{u}$ alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v}).$$

Exemple 19.13.

— $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

— $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.

— $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonale de $\overrightarrow{AO}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.

— Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sur (AD), on obtient à chaque fois $\overrightarrow{AD}$. Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times 3 = 9$.

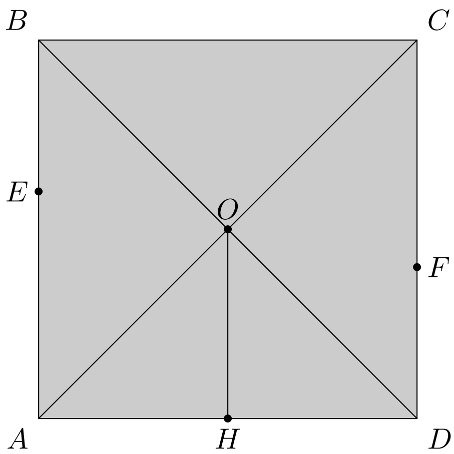


Figure 19.2 – Figure de l'exemple 19.13

Démonstration. ◊ On part du principe que l'on ait démontré :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

1. Supposons que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$. On pose $\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit $\vec{\jmath}$ le vecteur tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$. Ainsi, nous avons ainsi construit une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormale directe. Dans cette base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a, en notant $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$:

   $$\vec{u}(\|\vec{u}\|, 0)\ ;\ \vec{v}(\|\vec{v}\| \cos\theta, \|\vec{v}\|, \sin\theta)\ ;\ \vec{v'}(\|\vec{v}\| \cos\theta, 0)$$

   où l'on note $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. D'où :

   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v'} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

   D'où les formules des propriétés précédemment citées.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\theta = (\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\cos\theta = 1$.

□

19.4 Produit scalaire dans l'Espace

19.4.1 Extension de la définition à l'Espace

Définition 19.14.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'Espace. Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe toujours un plan $\mathscr{P}$ contenant A, B et C.

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'Espace le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$.

Remarques 19.15.

1. On a alors :

   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right].$$

   Cette égalité est bien *indépendante* du plan $\mathscr{P}$ choisi.
2. Quitte à se placer dans le plan $\mathscr{P}$, les différentes expressions du produit scalaire (sauf l'expression dans un repère du plan) des sections précédentes restent valables.

3. Les règles de calcul sur le produit scalaire (bilinéarité, carré scalaire, identités remarquables) restent les mêmes que dans le plan.

19.4.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété 19.16.

On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé de l'Espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration. ♢

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - (x^2+y^2+z^2) - (x'^2+y'^2+z'^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2x' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2xx' + 2yy' + 2zz'\right] = xx' + yy' + zz'.
\end{aligned}$$

□

Remarque 19.17.
On retrouve en particulier les deux résultats suivants, valables dans un repère orthonormé de l'Espace :

— Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

— Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors :

$$AB = \|AB\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

19.5 Applications

19.5.1 Vecteur normal à une droite

Définition 19.18.
On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathscr{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathscr{D}$.

Théorème 19.19.
Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

$$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

Théorème 19.20.
Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.

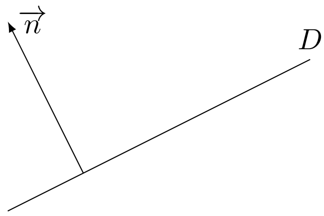


Figure 19.3 – Le vecteur $\vec{n}$ est normal à la droite D

19.5.2 Relations dans un triangle

Théorème 19.21. *Formule d'Al-Kashi*
Dans un triangle ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

◊ *Démonstration du théorème 19.21.* Si on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2 + b^2 + 2b\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos\widehat{A}$ □

Théorème 19.22. *Formule des 3 sinus*
Soit ABC un triangle (on note $a = BC$, $b = AC$, $c = BA$), S l'aire de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit au triangle :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

◊ *Démonstration du théorème 19.22.* On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

— Dans le cas où $\widehat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin(\pi - \widehat{B}) = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

— Dans le cas où $\widehat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\widehat{B} = c\sin\widehat{B}$.

Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$. D'où

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}.$$

□

19.5.3 Relations et équations trigonométriques

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tels que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{\imath}, \vec{v}) = a$. On a

$$\vec{u} = \cos b \cdot \vec{\imath} + \sin b \cdot \vec{\jmath} = \cos a \cdot \vec{\imath} + \sin a \cdot \vec{\jmath}.$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. De plus, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{\imath}, \vec{v}) - (\vec{\imath}, \vec{u}) = a - b$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b).$$

D'où :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, on obtient :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

À partir de ces formules, on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \cos X = \cos \alpha &\Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \sin X = \sin \alpha &\Leftrightarrow \begin{cases} X = \alpha + 2k\pi \\ X = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

19.5.4 Recherche de lieux géométriques

1. On cherche tout d'abord l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Propriété 19.23.
Soit I le milieu du segment $[AB]$ (avec $A \neq B$). Pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \text{(Théorème de la médiane).}$$

Etant donné un réel k, on en déduit que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est un cercle, ou un point ou l'ensemble vide.

Exemple 19.24.
Soit A et B deux points tels que $AB = 2$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$. On utilise le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{4}{2} = 20 \\ \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3 \end{aligned}$$

(car $IM > 0$). L'ensemble E est donc le cercle de centre I et de rayon 3.

2. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par I le milieu de $[AB]$.

Exemple 19.25.
Soit A et B deux points tels que $AB = 4$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12.$$

Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 12.$$

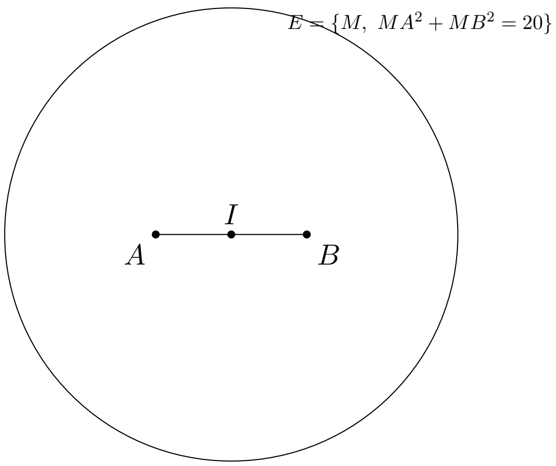


Figure 19.4 – Construction de l'ensemble E de l'excemple 19.24

On en déduit que $M \in E \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$. E est donc le cercle de centre I et de rayon 4

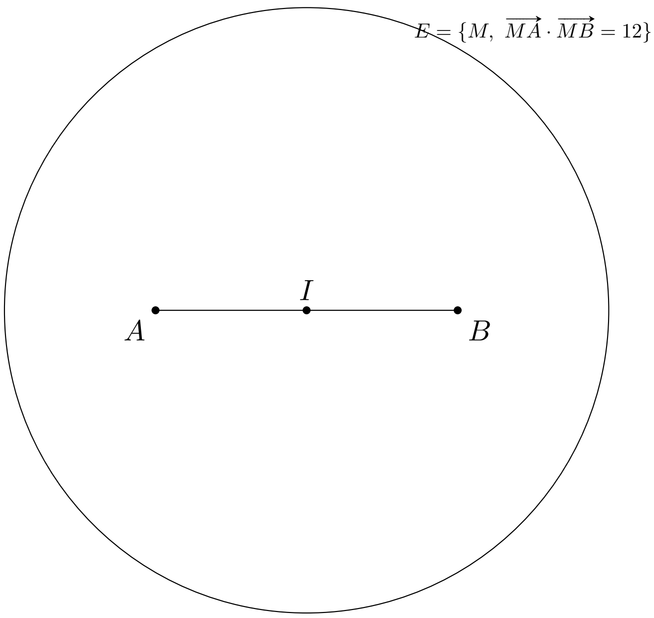


Figure 19.5 – Construction de E de l'exemple 19.25

3. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$. Pour cela, on cherche un point particulier H appartenant à l'ensemble. On a alors $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = k$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \vec{u}.$$

   L'ensemble est alors la droite passant par H de vecteur normal $\vec{u}$.

Exemple 19.26.
Soit A et B deux points tels que $AB = 3$. On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Soit H le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient de sens contraires et tel que $AH \times AB = 6 \Leftrightarrow AH = \frac{6}{3} = 2$. Ainsi, on a bien $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$. Dès lors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

L'ensemble E est alors la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

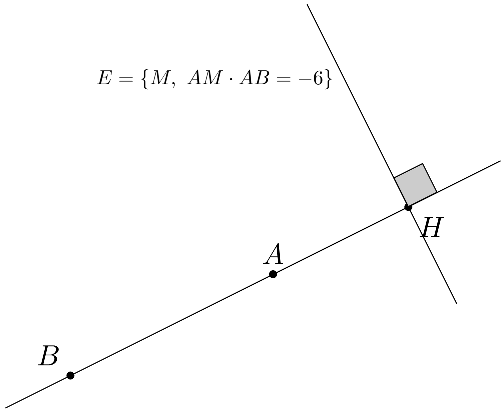


Figure 19.6 – Construction de E de l'exemple 19.26

19.5.5 Intersection d'une droite et d'un plan

▶ **Exercice 19.27.**
Déterminer l'intersection éventuelle du plan $\mathscr{P}$ d'équations $2x - y + 3z - 2 = 0$ et de la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

◊ *Solution.* Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 3 \times 2 = 7 \neq 0$$

donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont bien sécants en un point. Ce point vérifie :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

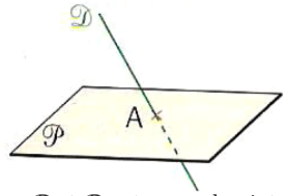
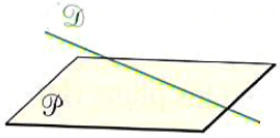
$$\begin{aligned} &2(-2 + t) - (1 + t) + 3 \times 2t - 2 = 0 \\ &-4 + 2t - 1 - t + 6t - 2 = 0 \\ &7t = 7 \\ &t = 1 \end{aligned}$$

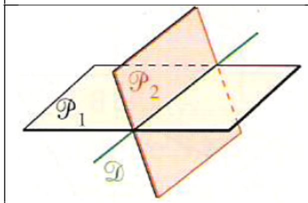
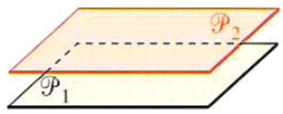
et, par suite :

$$\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 \times 1 = 2 \end{cases}.$$

Le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ est $A(-1; 2; 2)$. □

19.6 Intersection de deux plans

Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$		
sécants	**parallèles**	
 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun	 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun	 $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	**parallèles**	
	confondus	**strictement parallèles** ou **disjoints**
 leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	 leur intersection est un plan	 leur intersection est vide

Remarque 19.28.

$\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathscr{P}'$ un plan de vecteur normal $\vec{n'}$;

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires et si A est un *point quelconque* de $\mathscr{P}$:
  - Si $A \in \mathscr{P}'$, les plans $\mathscr{P}$ sont confondus ;
  - Si $A \notin \mathscr{P}'$, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$.

▶ **Exercice 19.29.**
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y - 2z - 1 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $-x + 4y + z - 3 = 0$. Étudier l'intersection éventuelle de plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

◊ *Solution.* Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}'$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathscr{D}$. Pour déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, on va considérer une des inconnues (ici z) comme le paramètre :

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ -x + 4y + z - 3 = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2t + 1 \\ -x + 4y = -t + 3 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2t - 1 \\ -x + 4(2x - 2t - 1) = -t + 3 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7t + 7 \\ y = 2x - 2t - 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2(t+1) - 2t - 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}.$$

□

LEÇON

20

Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.

Préambule

Niveau : transversal

Prérequis : notions de proportionnalité, géométrie vectorielle

Références :

[1] E. Suquet, *Théorème de Thalès.* Troisième. [url]

[2] Unknown, *Propriété de Thalès.* Troisième. [url]

[3] Unknown, *Théorème de Thalès - Démonstration.* [url]

[4] J. Hamon, *Leçon 24 : Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.* [url]

[5] C. Boulonne, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES.* Session 2013.

[6] C. Parfenoff, *Colinéarité de deux vecteurs.* Première S. [url].

[7] Collège Thérouanne, *Echelles et mouvement uniforme.* [url].

[8] KB, *Homothéties.* [url]

20.1 Proportionnalité : définition

Définition 20.1.
Dire que deux grandeurs sont *proportionnelles* revient à dire que les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre, appelé *coefficient de proportionnalité*

Exemple 20.2.
On achète des pommes à la pesée, à 2 € le kilogramme. Dans le tableau ci-dessous, les prix payés obtenus en multipliant les quantités par le même nombre : 2.

Le prix payé est proportionnel à la quantité de pommes achetées. Ce tableau est appelé tableau de proportionnalité.

Quantité en kg	1	1,5	2	2,3
Prix payé en €	2	3	4	4,6

$\times 2$

Proposition 20.3.
On peut également reconnaître un tableau de proportionnalité si les deux lignes d'une même colonne sont obtenues en multipliant par un même nombre les deux lignes d'une autre colonne.

$\times\frac{4}{3}$

Quantité en kg	1	1,5	2	2,3
Prix payé en €	2	3	4	4,6

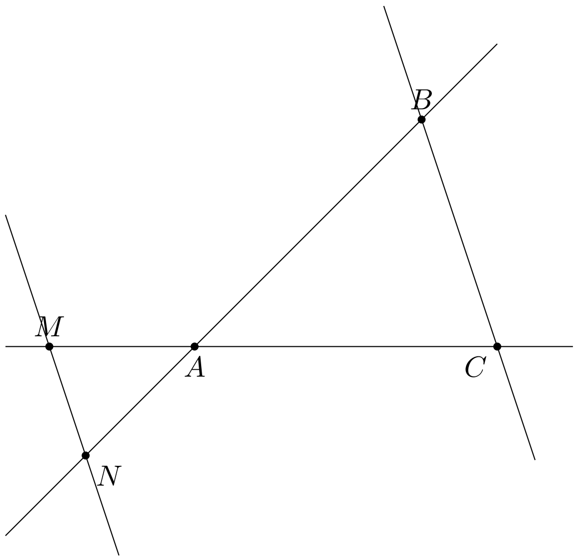
20.2 Théorème de Thalès

20.2.1 Enoncé du théorème de Thalès

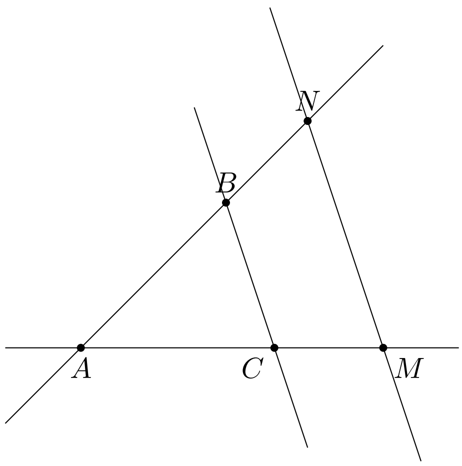
Théorème 20.4.
Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites parallèles (de telle façon que l'on ait deux triangles), alors le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit.

Deux configurations possibles :

1.



2.



◊

Égalité entre rapport de longueurs. Comme AMN est un agrandissement de ABC alors :

— AM est un agrandissement de AB ;

— AN est un agrandissement de AC ;

— MN est un agrandissement de BC.

Dit d'une autre façon, on peut trouver un nombre $k > 1$ tel que :

— $AM = kAB$;

— $AN = kAC$;

— $MN = kBC$.

On a donc :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k.$$

□

Résolution type brevet. Si :

— $(MN)//(BC)$;

— les points A, B, M sont alignés ;

— les points A, C, N sont alignés.

Alors, je peux appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AMN :

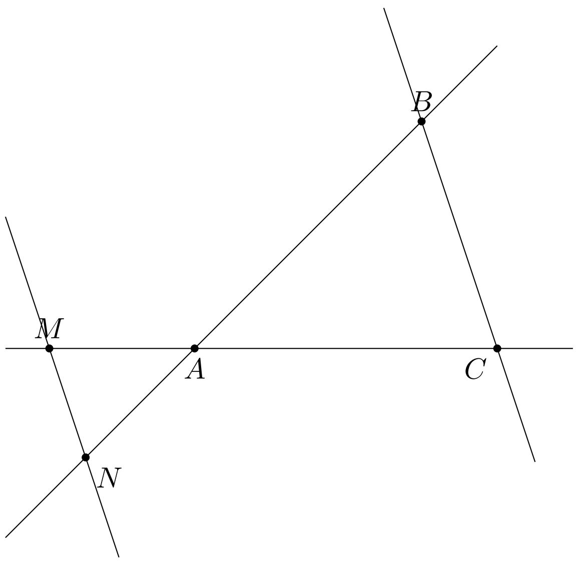
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

□

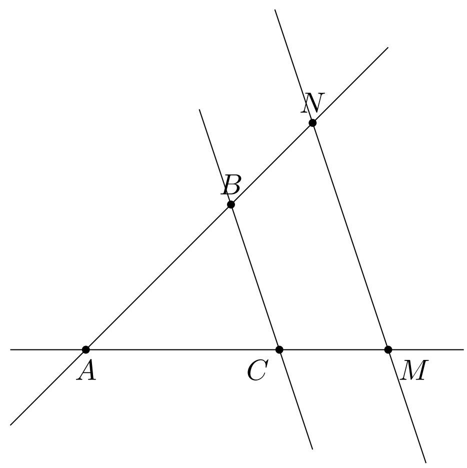
20.2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 20.5.
Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites d et d' (de telle façon que l'on ait deux triangles). Si le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit alors d et d' sont parallèles.

1.



2.



Pour vérifier que AMN est un agrandissement de ABC, il faut montrer qu'il existe un nombre k tel que :

— $AM = kAB$;

— $AN = kAC$;

— $MN = kBC$.

Remarque 20.6.
On peut montrer que dans la configuration où nous sommes, il suffit de montrer qu'il existe un nombre k tel que $AM = kAB$, $AN = kAC$ pour conclure que AMN est un agrandissement de ABC.

Rédaction type brevet. ♢

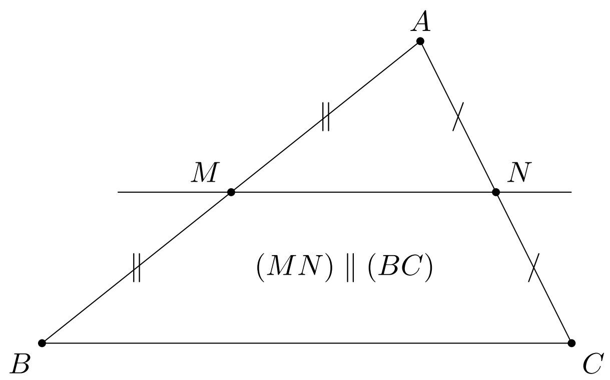
— Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

— Si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre

alors on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès et conclure que $(MN)//(BC)$. □

20.2.3 Un cas particulier : le théorème de la droite des milieux

Théorème 20.7.
Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors, elle coupe le troisième côté en son milieu.



Théorème 20.8.
Dans un triangle, si une droite passe par le milieu de deux côtés aalors elle est parallèle au troisième côté.

Théorème 20.9.
Dans les deux configurations précédentes, on a $MN = \frac{1}{2}BC$.

20.2.4 Agrandissement / réduction d'une figure

Définition 20.10.
Lorsque l'on multiplie par un nombre $k > 0$ toutes les longueurs d'une figure $\mathscr{F}$, on obtient une figure $\mathscr{F}'$ qui est :

1. un agrandissement de $\mathscr{F}$ si $k > 1$;
2. une réduction de $\mathscr{F}$ si $0 < k < 1$.

Le nombre k est appelé le facteur d'agrandissement ou de réduction.

Remarque 20.11.
Dans la section précédente, le triangle ABC est un agrandissement de AMN de facteur 2.

Propriété 20.12.
Dans un agrandissement ou une réduction :

— les mesures d'angles sont conservées ;

— les droites parallèles restent parallèles ;

— les droites perpendiculaires restent perpendiculaires ;

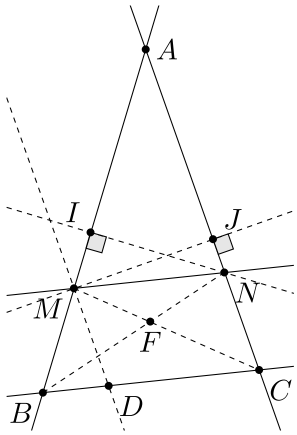
— les aires sont multipliés par k^2 ;

— les volumes sont multipliés par k^3.

20.2.5 Démonstration du théorème de Thalès

Une démonstration due à Euclide

Démonstration. $\diamondsuit$



On considère les triangles AMN et BNA. On a : $2\mathscr{A}(AMN) = AM \cdot NI$ et $2\mathscr{A}(BNA) = AB \cdot IN$ donc on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(BNA)}.$$

De plus, $2\mathscr{A}(AMN) = AN \cdot MJ$ et $2\mathscr{A}(CMA) = AC \cdot MJ$ donc

$$\frac{AN}{AC} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(CMA)}.$$

Maintenant, montrons que $\mathscr{A}(BNA) = \mathscr{A}(CMA)$. Ceci revient à montrer que $\mathscr{A}(MFB) = \mathscr{A}(CFN)$: (MN) et (BC) sont parallèles donc on en déduire que $\mathscr{A}(BNM) = \mathscr{A}(CMN)$: même base et même hauteur. Or :

$$\mathscr{A}(BNM) = \mathscr{A}(BMF) + \mathscr{A}(FMN) \quad \text{et} \quad \mathscr{A}(CMN) = \mathscr{A}(CFN) + \mathscr{A}(FMN),$$

ce qui démontre l'égalité.

Ainsi, comme $\mathscr{A}(BNA) = \mathscr{A}(CMA)$, on a alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(BNA)} = \frac{\mathscr{A}(AMN)}{\mathscr{A}(CMA)} = \frac{AN}{AC}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité en considérant le parallélogramme $MNCD$: d'après ce que l'on vient de démontrer, en se plaçant dans le triangle ABC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BD}{BC}$, d'où :

$$\frac{BA - MA}{BA} = \frac{BC - DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

car $MNCD$ est un parallélogramme. On a ainsi démontré l'implication directe.

Réciproque : elle utilise le sens direct.

Soit le point E de d tel que (NE) est parallèle à (BC), alors A, E et B sont alignés dans le même ordre que A, N et C et donc on peut appliquer le sens direct :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

d'après l'hypothèse. Donc : $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AB}$ d'où $AE = AM$, les points étant tous alignés dans le même ordre, il vient que $E = M$ donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. $\square$

Preuve purement vectorielle

Démonstration. ♢ Il faut se poser la question de la validité d'une démonstration vectorielle du théorème de Thalès. En effet, la géométrie vectorielle s'appuis souvent sur une définition géométrique des vecteurs, définition dans laquelle le théorème de Thalès joue un rôle prépondérant quand il s'agit d'affirmer que $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$.

Mais on peut toutefois s'intéresser à une écriture possible du théorème de Thalès et sa justification grâce aux opérations vectorielles. Ce qui pourrait permettre de généraliser le théorème de Thalès à tout espace affine euclidien associé à un espace vectoriel.

Dire que D est sur (AB), c'est écrire qu'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}$.

De même, dire que E est sur (AC), c'est écrire qu'il existe un réel y tel que $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AC}$.

Enfin, dire que les droites (ED) et (BC) sont parallèles, c'est écrire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{BC}$.

Les égalités précédentes et la relation de Chasles permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} y\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE} \\ y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE} \\ y\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC} &= x\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

L'écriture suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ se doit être unique car ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $y = x$ et $y = t$. On obtient donc les trois égalités :

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{BC}.$$

L'avantage de cet énoncé et de cette démonstration est que cela n'oblige pas à traiter les différents cas de configuration évoqués plus haut. □

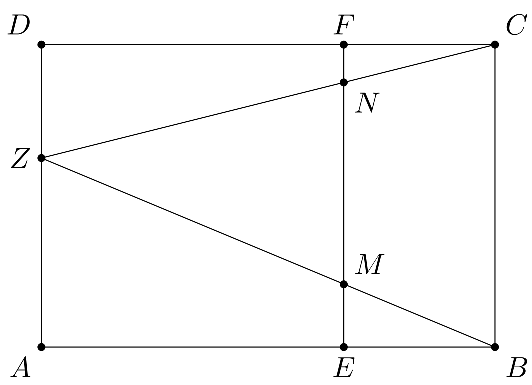
20.2.6 Exemples et applications

Une longueur constante

Soit $ABCD$ un rectangle. On construit le point E sur le segment $[AB]$ et F sur le segment $[CD]$ tel que $(EF)//(BC)$.

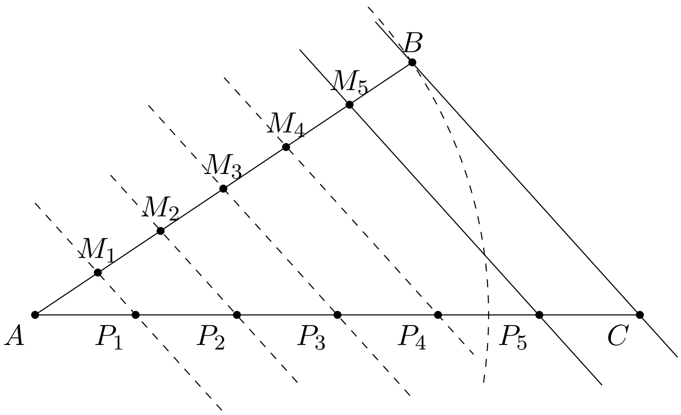
Soit $Z \in [DA]$. Le segmenet $[ZB]$ coupe le segment $[EF]$ en un point M et le segment $[ZC]$ coupe le segment $[EF]$ en un point N.

Montrer que $MN = \text{cst}$.



Découper un segment de longueur donné en n segments de même longueur

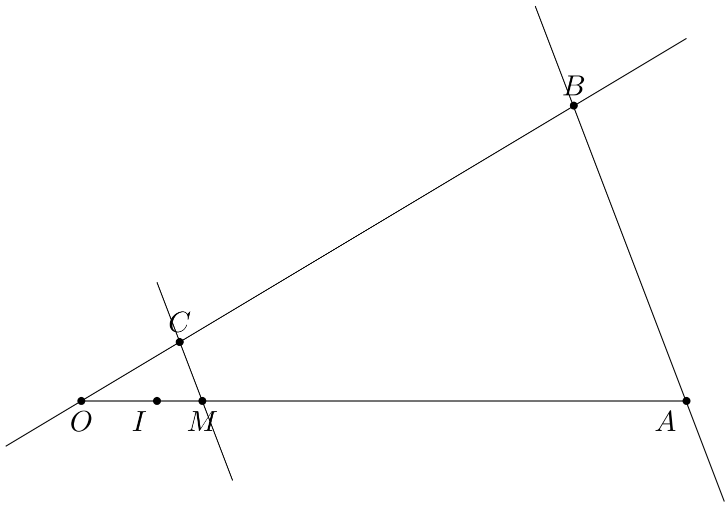
Soit $[AC]$ un segment de longueur 8. On veut découper ce segment en 6 segments de même longueur. Pour cela, on trace un cercle de centre A et de rayon 6. Soit B sur le cercle, on découpe le segment $[AB]$ en segment de 1 cm et ensuite on trace des parallèles à (BC) pour avoir le découpage du segment $[AC]$ en 6 segments de même longueur.



Construire à la règle et au compas une fraction

On considère un axe tel que $OI = 1$. Construire M tel que $OM = \frac{a}{b}$.

Démonstration. $\diamondsuit$ On place A tel que $OA = a \times OI$.
Soit C un point de d'. On place B tel que $OB = bOC$.



La droite parallèle à (AB) couple l'axe en M tel que

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{b}.$$

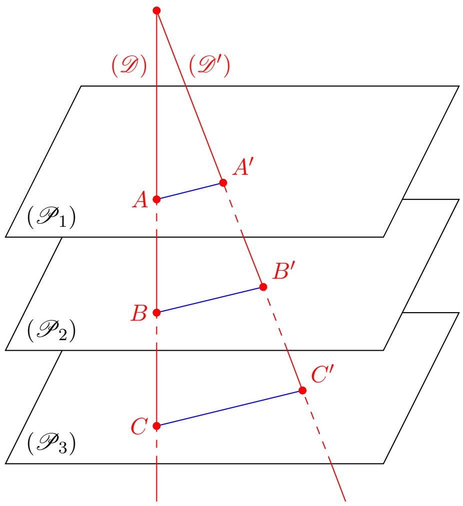
D'où

$$OM = \frac{1}{b}OA = \frac{a}{b}OI = \frac{a}{b}.$$

□

20.2.7 Théorème de Thalès dans l'espace

On considère la figure suivante :



Théorème 20.13. *Théorème de Thalès dans l'espace*
Si les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont parallèles alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Démonstration. ◊ On considère la parallèle à D passant par A' puis on applique le théorème de Thalès deux fois. □

Théorème 20.14. *Première réciproque du thm de Thalès dans l'espace*
Soient A, B et C trois points d'une droite $\mathscr{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathscr{D}'$, on suppose que ces 6 points sont deux à deux distincts. Alors si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles à un même plan.

Démonstration. ◊ On introduit les plans parallèles $\mathscr{P}_A$, $\mathscr{P}_B$ et $\mathscr{P}_C$ passant respectivement par A, B et C et de vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$. $\mathscr{P}_A$ contient $\overrightarrow{AA'}$, $\mathscr{P}_B$ contient $\overrightarrow{BB'}$ et $\mathscr{P}_C$ coupe $\mathscr{D}'$ en un point C''. Le théorème de Thalès (sens direct) entraîne que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}.$$

Or, par hypothèse, on a : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donc $C'' = C'$.

Le plan $\mathscr{P}_C$ contient donc $\overrightarrow{CC'}$ et ainsi (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles à un même plan (car les trois plans étaient supposés parallèles. □

Théorème 20.15. *Seconde réciproque du thm de Thalès dans l'espace*
Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ trois droites distinctes. Trois plans distincts $\mathscr{P}_A$, $\mathscr{P}_B$ et $\mathscr{P}_C$ coupent $\mathscr{D}$ respectivement en A, B, C, coupent $\mathscr{D}'$ respectivement en A', B', C' distincts et coupent $\mathscr{D}''$ respectivement en A'', B'', C'' distincts. On suppose que C, C' et C'' ne sont pas alignés.

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''C''}}$ et si $\mathscr{P}_A$ est parallèle à $\mathscr{P}_B$ alors $\mathscr{P}_C$ est parallèle à $\mathscr{P}_A$ et à $\mathscr{P}_B$.

Démonstration. ♢ Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par C est parallèle à $\mathscr{P}_A$ et à $\mathscr{P}_B$. Il coupe $\mathscr{D}'$ en Q et $\mathscr{D}''$ en R de sorte qu'on puisse utilise le théorème de Thalès (sens direct) aux trois plans parallèles $\mathscr{P}_A$, $\mathscr{P}_B$ et $\mathscr{P}$. On obtient l'égalité :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'Q}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''R}}$$

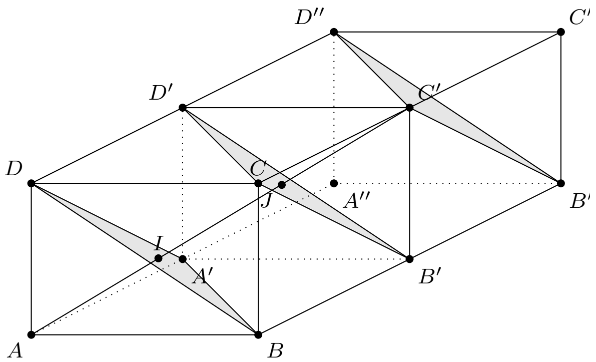
ce qui entraîne avec les hypothèses que $Q = C'$ et $R = C''$ et ainsi $\mathscr{P} = \mathscr{P}_C$.

Les plans $\mathscr{P}_A$, $\mathscr{P}_B$ et $\mathscr{P}_C$ sont parallèles. □

▶ **Exercice 20.16.**
Soit $ABCDA'B'C'd'$ un parallélépipède rectangle de l'espace, le rectangle $A'B'C'D'$ étant le translaté du rectangle $ABCD$ par le vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Montrer que $(A'BD)$ et $(B'D'C)$ sont parallèles.

Ces deux plans coupent respectivement la grande diagonale (AC') en I et J. En utilisant le théorème de Thalès dans l'espace, montrer que I et J sont situés au $1/3$ et au $2/3$ de $[AC'']$.

♢ *Solution.* En utilisant le fait qu'on travaille avec des rectangles, il est facile de montrer que $(BCD)//(B'C'D')$. On considère la figure suivante (les points A'' (resp. B'', C'' et D'') s'obtiennent en faisant une symétrie centrale du point A (resp. B, C et D) par rapport au point A' (resp. B', C' et D').



Pour les mêmes raisons, $(D''C'B'')//(B'D'C)//(A'BD)$. On note I' le point d'intersection entre $(A'DB)$ et (AD'). On constate que I' est le centre du rectangle $AA'D'D$ donc $\frac{\overline{AD'}}{\overline{AI'}} = 2$.

Le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AI'}} = 2 \Rightarrow \overline{AJ} = 2\overline{AI}.$$

Il reste à montrer que $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC'}$.

On note I'' le point d'intersection entre $(A'DB)$ et (AD''). Le théorème de Thalès nous donne : $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AD''}}{\overline{AI''}}$. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$. En fait, I'' appartient à la droite $(A'D)$ et à la droite (AD''). On a :

$$A(0;0;0)\ ;\ A'(0;0;1)\ ;\ D(0;1;0)\ ;\ B''(0;1;2)\ ;\ \overrightarrow{A'D}(0;1;-1)\ ;\ \overrightarrow{AD''}(0;1;2)$$

$$(A'D) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{20.1}$$

$$(AD'') : \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 2\mu \end{cases} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{20.2}$$

On tire de (20.1) que $x = 0$ et $y + z = 1$ et de (20.2) que $z = 2y$.

Ainsi $x = 0$, $3y = 1$ soit $y = \frac{1}{3}$ et donc $z = \frac{2}{3}$. On a ainsi :

$$I''(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{AI''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD''}.$$

Alors $\dfrac{\overline{AD''}}{\overline{AI''}} = 3$. Comme $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AI}} = \dfrac{\overline{AD''}}{\overline{AI''}}$, on en déduit $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AI}} = 3$ soit $\overline{AI} = \dfrac{1}{3}\overline{AC'}$.
Conclusion : $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ et $\overline{AJ} = 2\overline{AC'}$. □

20.2.8 D'autres théorèmes de géométrie en rapport avec le théorème de Thalès

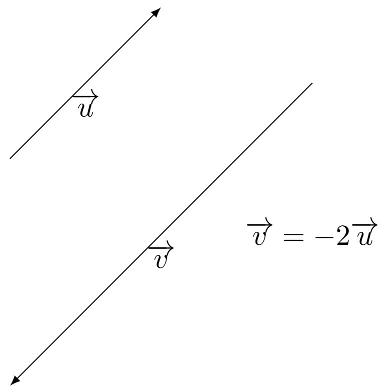
Voir la section 33.5 de la leçon 33 : Théorème de Thalès de C. Boulonne, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*. Session 2013.

20.3 Colinéarité de deux vecteurs

20.3.1 Propriété caractéristique

Définition 20.17.
Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exemple 20.18.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$.



Remarques 20.19.
— Deux vecteurs non nuls sont colinéaires, si et seulement si, ils ont la même direction.
— Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemples 20.20.
◊

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ sont colinéaires, en effet :
$$\frac{2}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{-3}{5},$$
donc $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$.
2. $\vec{u}(4;5)$ et $\vec{v}(8;-10)$ ne sont pas colinéaires car $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ alors $8 = \lambda \times 4$ donc $\lambda = 2$ et $-10 = \lambda \times 5$ donc $\lambda = -2$. C'est absurde ! Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Propriété 20.21.

Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

Exemples 20.22.
$\diamondsuit$

1. On veut montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
$$2 \times (-15) - (-3) \times 10 = -30 + 30 = 0$$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
2. On veut montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.
$$7 \times 8 - (-4) \times 14 = 56 - (-56) = 56 + 56 = 112 \neq 0.$$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Démonstration. $\diamondsuit$ Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives dans ce plan : $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors, par hypothèse, il existe un réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, cela se traduit sur les coordonnées par : $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. D'où :
$$xy' - yx' = x\lambda y - y\lambda x = \lambda xy - \lambda xy = 0.$$
Si l'un des vecteurs est nul alors la relation est clairement vérifiée.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\vec{u}$ non nul, l'une de ses coordonnées est donc non nulle.

— Si $x \neq 0$ alors $xy' - yx' = 0$ peut s'écrire : $y' = \dfrac{x'}{x}y$, c'est-à-dire $y' = \lambda y$ avec $\lambda = \dfrac{x'}{x}$. Et comme $\dfrac{x'}{x} \times x = x'$, on a aussi $x' = \lambda x$. Donc le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{v}(\lambda x; \lambda y)$, on a donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ et ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

— Si $y \neq 0$ alors $xy' - yx' = 0$ peut s'écrire $x' = \dfrac{y'}{y} \times x$ et on reprend le même raisonnement que plus haut.

On peut aussi supposer que $\vec{u}$ est nul alors $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

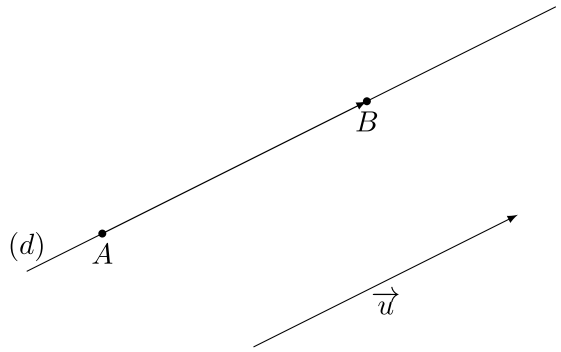
$\square$

Remarque 20.23.
$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' \neq 0$.

20.3.2 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 20.24.
On dit que $\vec{u}$ (vecteur non nul) est un *vecteur directeur* d'une droite (d) s'il existe deux points distincts A et B de cette droite (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple 20.25.
A et B sont sur la droite (d), $\vec{u} \neq 0$, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



Théorème 20.26.
Soit (d) une droite et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). Soit $\vec{v} \neq 0$ un vecteur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d).

L'ensemble des vecteurs directeurs de (d) est $\left\{\vec{v} \in \vec{\mathscr{E}},\ \exists k \in \mathbb{R}^*,\ \ \vec{u} = k\vec{v}\right\}$.

Exemple 20.27.
◊ Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) dont une équation cartésienne est $3x + 2y + 5 = 0$.

Le vecteur $\vec{v}\left(-8; 12\right)$ est colinéaire au vecteur (en effet, $\vec{v} = 3\vec{u}$). Alors $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d).

Les vecteurs directeurs de (d) sont de la forme $\begin{pmatrix}-2k\\3k\end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Conséquence 20.28.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de deux droites (d) et (d'). Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

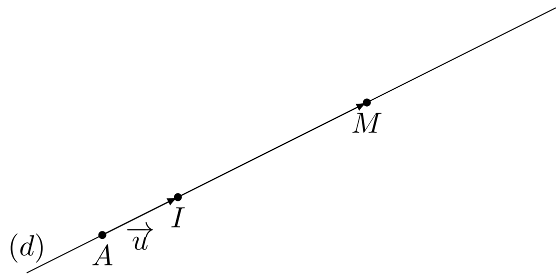
Exemple 20.29.
◊ Soit (d) la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$ et (d') la droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-16\end{pmatrix}$. On veut montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.

On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

Propriété 20.30.
A, B et C sont trois points alignés si et seulement si deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété 20.31.
(d) est une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. La droite (d) est l'ensemble des points M du plan, tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Démonstration. ♢



Soit I le point de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$. M appartient à la droite (d), si et seulement si, les points A, I et M sont alignés. Or A, I et M sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Comme $\overrightarrow{AI} = \vec{u}$ alors A, I et M sont alignés si et seulement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

On a démontré que M appartient à la droite (d) si, et suelement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. □

20.4 Echelles et plans

Définition 20.32.
L'*échelle* du plan est le coefficient de proportionnalité entre les distances réelles et les distances mesurées sur la plan exprimées dans les mêmes unités de longueur.

Distance réelle (en cm)		
Distance sur le plan (en cm)		

$\times$échelle

On peut ainsi calculer l'échelle en divisant le nombre d'en bas par le nombre d'en haut.

$$\boxed{\text{L'échelle} = \frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}}$$

Exemple 20.33.
Sur un plan, on lit « échelle $\dfrac{1}{100000}$ ». C'est le plus souvent par une fraction de numérateur 1 que s'expriment les échelles d'une carte. Cela signifie que les distances réelles sont multipliées par $\dfrac{1}{100000}$ pour obtenir les distances sur la carte. Ce qui signifie que 1 cm sur la carte représente 100000 cm dans la réalité.

Distance réelle (en cm)	100000	
Distance sur le plan (en cm)	1	

$\times \dfrac{1}{100000}$

On convertira la distance réelle en km, 100000 cm = 1 km donc 1 cm sur la carte représente 1 km dans la réalité.

Comment trouver l'échelle du plan ?

Exemple 20.34.
Sur une carte, la distance entre Paris et Lyon est de 20 cm. À vol d'oiseau, il y a 400 km. Quelle est l'échelle du plan ?

On convertit 400 km en cm : $400 \times 100000 = 40000000$ et on dresse le tableau de proportionnalité suivant :

Distance réelle (en cm)	40000000	?
Distance sur le plan (en cm)	20	1

Le coefficient de proportionnalité peut être calculé de la manière suivante :

$$\frac{40000000}{20} = 2000000 \text{ cm}$$

Donc, la carte est à l'échelle $\dfrac{1}{2000000}$.

20.5 Homothéties

20.5.1 Définition

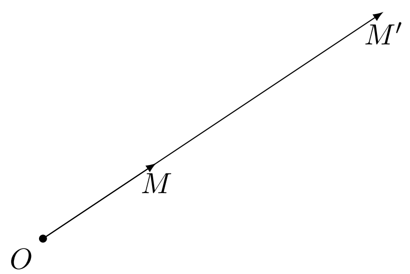
Définition 20.35.
Soit O un point, k un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre O et de rapport k, la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Remarque 20.36.
Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k, les énoncés suivants sont équivalents :

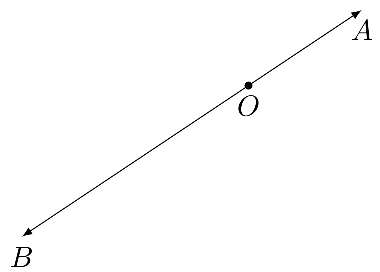
- M' est l'image de M par h ;
- $M' = h(M)$;
- $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemples 20.37.

- Le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, en effet $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$.



- Le point C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -2, en effet $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.



Le point B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2}$, en effet $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Conséquences 20.38.

- Les points O, M et M' sont alignés (les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires) et $OM' = |k|\,OM$.
- Le point O est sa propre image, on dit qu'il est invariant.
- Si A, B et C sont trois points alignés, A étant distinct de B et C, alors il existe une unique homothétie de centre A qui transforme B en C.
- Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport -1.
- Une homothétie de rapport 1 laisse les points invariants.

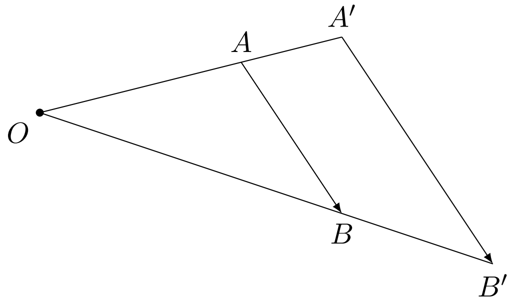
20.5.2 Propriétés

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Propriété 20.39.
Soient A et B deux points quelconques. Si $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. ◇ Comme $A' = h(A)$, on a $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et comme $B' = h(B)$, on a : $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Alors :

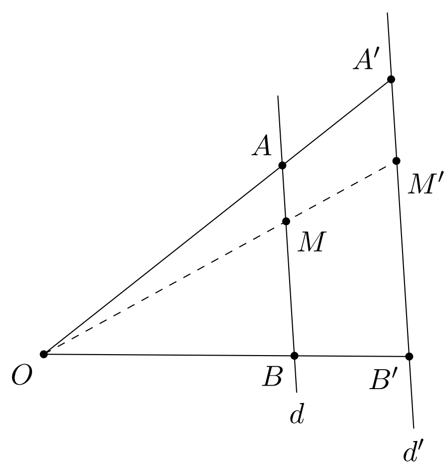
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{AB}.$$



□

Propriété 20.40. *Image d'une droite*
Une homothétie transforme une droite d en une droite d' parallèle à d. Si la droite d passe par le centre de l'homothétie, alors $d' = d$.

Démonstration. ◇ Soient A et B deux points de d et A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O et de rapport k.



Comme $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, la droite d' passant par A' et B' est parallèle à d.

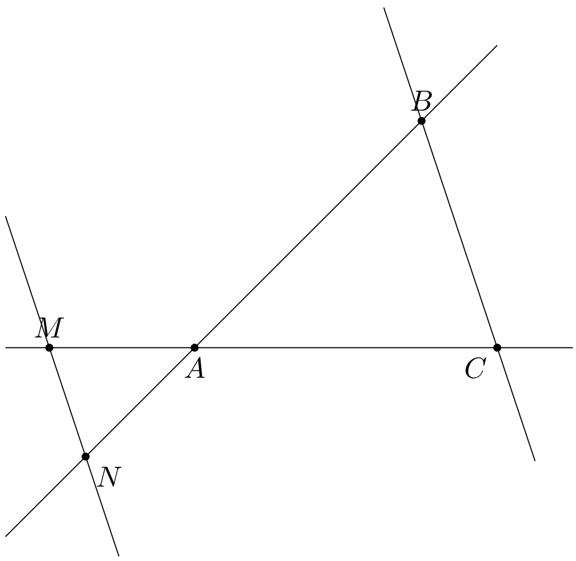
Soit M un point de d. Montrons que $M' = h(M)$ est sur d'. Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$. D'autre part, $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$. Donc :

$$A'M' = kx\overrightarrow{AB} = xk\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{A'B'}.$$

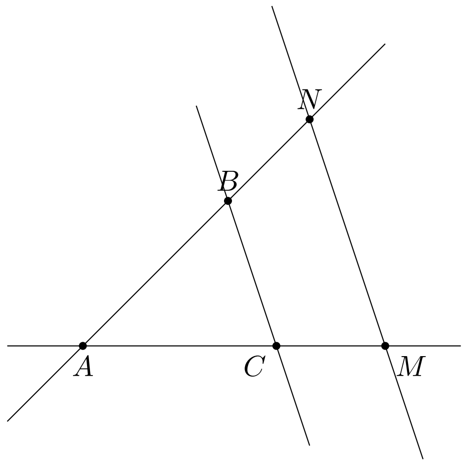
Cela montre que A', B' et M' sont alignés donc M' est sur d'. En prenant x dans $[0;1]$, cela montre aussi que le segment $[A'B']$ est l'image du segment $[AB]$. □

Propriété 20.41. *Triangles semblables*
Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC). Si (MN) est parallèle à (BC), alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

1.



2.



Démonstration. ♢ Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M. Le point C se trouve à l'intersection des droites (AC) et (BC). Son image par h sera donc à l'intersection des images de (AC) et (BC).

L'image de (AC) est (AC) (droite passant par le centre de l'homothétie). L'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) passant par M image de B, c'est donc la droite (MN).

L'image de C par h est donc l'intersection des droites (AC) et (MN), c'est le point N. □

Propriété 20.42. *Image d'un cercle*
Une homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre I et de rayon R en son cercle de centre I' et de rayon R' avec $I' = h(I)$ et $R' = |k|\,R$.

20.5.3 Effets de l'homothétie

Propriété 20.43. *Distances, aires et volumes*
Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Propriété 20.44. *Conservation de l'alignement*
Si A, B et C sont trois points alignés, leurs images A', B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

Propriété 20.45. *Conservation du parallélisme*
Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, leurs images d'_1 et d'_2 par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

Propriété 20.46. *Conservation du barycentre*
Si G est la barycentre de (A, α) et (B, β), et si G', A' et B' sont les images respectives de G, A et B par une homothétie, alors G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).

En particulier, les homothéties conservent les milieux.

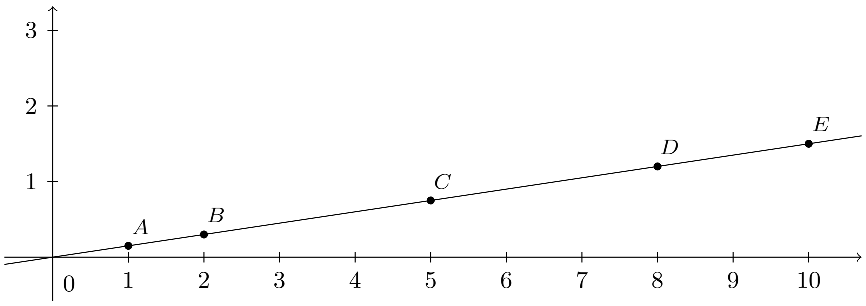
Propriété 20.47. *Conservation des angles orientés*
Dans le plan orienté, si A, B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

20.6 Proportionnalité et fonction linéaire

Exemple 20.48.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	0,15	0,30	0,75	1,20	1,50

Le graphique suivant représente le prix payé en fonction du nombre de SMS envoyé :



Propriété 20.49.
Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les points de la représentation graphique des valeurs d'une grandeur en fonction des valeurs de l'autre grandeur sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

Exemple 20.50.
Reprenons l'exemples des SMS.

Nombre de SMS	1	2	5	8	10
Prix payé en €	0,15	0,30	0,75	1,20	1,50

$\times 0.15$

Le coefficient de proportionnalité vaut 0,15 donc si on envoie x SMS, le prix à payer $f(x)$ en fonction du nombre x de SMS envoyés sera de $f(x) = 0{,}15 \times x$.

Définition 20.51.
On se donne un réel a. Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre ax est appelé *fonction linéaire* de coefficient directeur a.

Si on appelle cette fonction f, on note alors $f : x \mapsto ax$.

Le nombre $f(x) = ax$ est l'image de x par la fonction f et le nombre x est l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

Propriété 20.52.
La représentation graphique d'une fonction linéaire f de coefficient directeur a est une droite passant par l'origine du repère et par le point $(1; a)$.

Une équation de cette droite est $y = f(x)$.

Réciproquement, toute droite passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Démonstration. ◊ On considère le cas où $a > 0$.

$f(0) = 0$ et $f(1) = a$ donc la courbe passe bien par ces deux points. Soit x un réel non nul, considérons alors les points $O(0;0)$, $A(1;a)$, $A'(1;0)$, $B(x;y)$, $B'(x;0)$ sont tels que B appartienne à la droite passant par O et par A.

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles donc on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OBB'. On a : $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$. Les triangles OAA' et OBB' sont rectangles donc on peut appliquer Pythagore pour déterminer les longueurs OA et OB :

$$OB^2 = OB'^2 + BB'^2 = x^2 + y^2$$
$$OA^2 = OA'^2 + AA'^2 = 1 + a^2.$$

D'où :

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{1}{x} = \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{1+a^2}{x^2+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1+a^2}{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2(1+a^2) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2a^2 \Leftrightarrow y = ax$$

car si $y = -ax$, les points O, A et B ne seraient pas alignés. □

Propriété 20.53.
Si deux grandeurs sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité a, alors l'une est fonction linéaire de l'autre et le coefficient de proportionnalité a de la situation de proportionnalité est égal au coefficient directeur de la fonction linéaire associée.

Réciproquement à toute fonction linéaire correspond une situation de proportionnalité.

20.7 Le nombre π

Définition 20.54.
On définit le nombre π comme étant le rapport du périmètre de tout cercle divisé par son diamètre.

LEÇON

21

Problèmes de constructions géométriques.

Préambule

Niveau : tous niveaux

Prérequis : homothétie, théorème de Thalès, construction à la règle et au compas

Références :

[1] P. Debart, *Constructions géométriques au collège.* [url]

[2] Cojerem, *Des situations pour enseigner la géométrie 1re/4e - Guide méthodologie.* De Boeck, 2000.

[3] Y. Thomas, *Problèmes de construction.* Primaths. [url]

[4] Contributeurs de Wikipédia, *Construction à la règle et au compas.* Wikipedia, l'encyclopédie libre.

[5] *Épreuve écrite nº 2, Exercice 2. Partie A.* CAPES Externe 2018. [url]

[6] Contributeurs de Wikipédia, *Bissectrice.* Wikipedia, l'encyclopédie libre.

21.1 Programme de construction

Définition 21.1. *Programme de construction*

Un *programme de construction* est un texte qui permet d'établir une figure géométrique. On retrouve ce programme de construction au début d'un exercice de géométrie de collège ou de lycée.

Dans cette, leçon, on présente quelques programmes de construction pouvant être vus au collège ou au lycée. On donnera, en plus de la démonstration, une construction détaillée sur le logiciel GeoGebra. Tout ce qui est dans un cadre bleu est à taper sur la barre de saisie.

21.2 Construction à la règle et au compas (RC)

21.2.1 Introduction

La construction à la règle et au compas consiste à tracer des figures uniquement avec les deux outils de traçage géométrique, la règle et le compas.

— La règle est un outil de traçage qui permet de tracer un trait (généralement pour relier deux points).

— Le compas est un outil de traçage qui permet de tracer des cercles à partir de son centre (pointe) et de son rayon (distance pointe-crayon).

Cette méthode de construction est originaire des écrits d'Euclide : les Éléments. Euler assure (avec un système d'axiomes)

— qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés

— qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné.

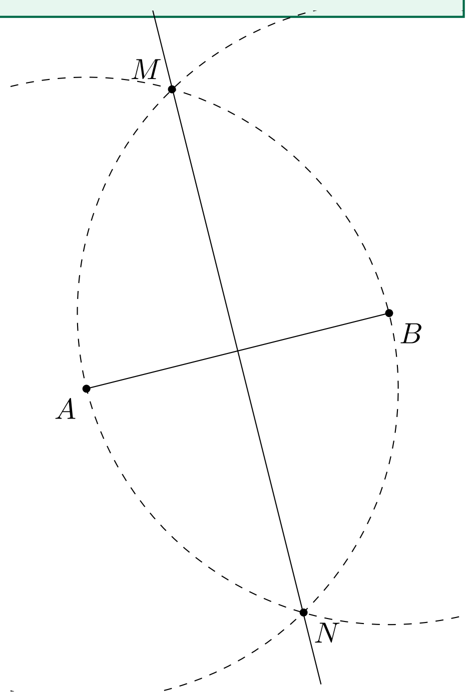
Dans toute cette partie, l'abréviation RC désigne « à la règle et au compas ».

21.2.2 Quelques constructions RC suggérées par le sujet de l'épreuve 2 Partie A du CAPES Externe 2018

Le sujet de l'épreuve 2 du CAPES Externe 2018 consacre une partie A de l'exercice 2 sur les « constructions à la règle et au compas ». On y trouve quelques constructions intéressante.

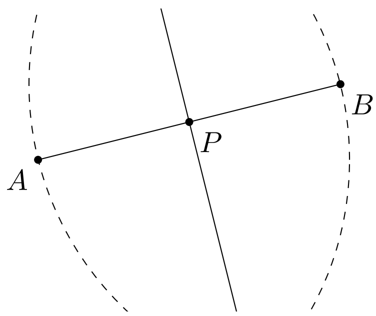
Proposition 21.2.
Soit A et B deux points distincts constructibles RC. La médiatrice du segment $[AB]$ est constructible RC.

◊ *Démonstration.* Soit A et B deux points distincts constructible RC. On pointe le compas en A et on met le crayon en B pour tracer le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre A et de rayon AB. Tous les points P de ce cercle sont tels que $AP = AB$.
On pointe le compas en B et on met le crayon en A pour tracer le cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre B et de rayon AB. Tous les points R de ce cercle sont tels que $BR = AB$. Ainsi les deux points (M et N) intersections des cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont tels que $AM = AB = MB$ et $AN = AB = NB$. Ils appartiennent bien à la médiatrice du segment $[AB]$. Ainsi, on utilise la règle pour tracer la droite (MN) qui est donc la médiatrice du segment $[AB]$. □



Conséquence 21.3.
Soit A et B deux points distincts constructibles RC. Le milieu du segment $[AB]$ est constructible RC.

◊ *Démonstration.* Dans la démonstration précédente, l'intersection de la droite (MN) avec le segment $[AB]$ est le milieu P du segment $[AB]$ car $P \in [AB]$ et P appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ donc $AP = PB$.



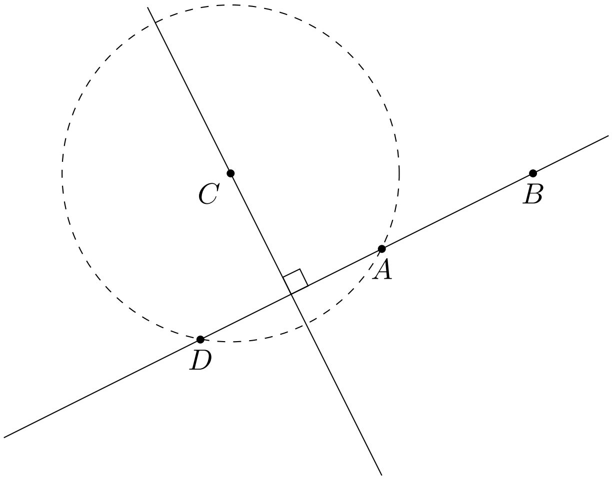
□

Proposition 21.4.
Soit A, B et C trois points distincts constructibles RC avec $A \neq B$. La droite perpendiculaire à (AB) passant par C est constructible RC.

♢ *Démonstration.* Soit A, B et C trois points distincts constructibles RC avec $A \neq B$. On trace à la règle la droite $(d) = (AB)$ puis on trace le cercle de centre C et de rayon[1] AC.

Ce cercle intersecte la droite (d) en un point D. Il suffit ensuite de tracer la médiatrice du segment $[AD]$. Cette médiatrice passe par le point C car D appartient au cercle de centre A et de rayon AC, ainsi $CD = CA$.

Comme la médiatrice est une droite perpendiculaire au segment $[DA]$, elle est aussi perpendiculaire à la droite (AB).



□

Proposition 21.5.
La droite parallèle à (AB) passant par C est constructible RC.

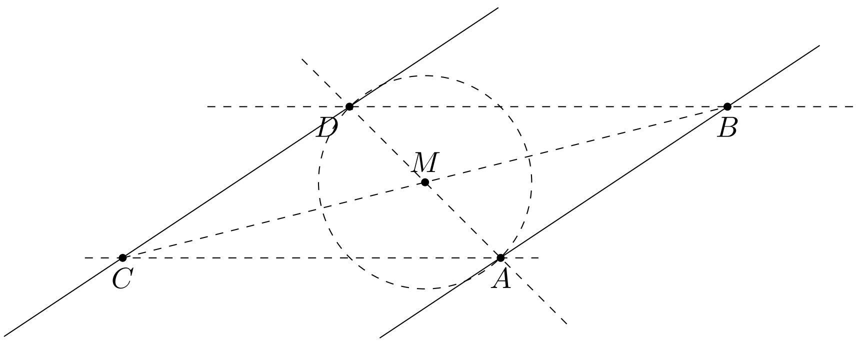
♢ *Démonstration.* Soit A, B et C trois points distincts constructibles RC avec $A \neq B$.

Si D appartient à la droite parallèle à (AB) passant par C alors $ABDC$ est un parallélogramme. En effet, si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme et ainsi (AB) parallèle à (CD).

On peut utiliser la propriété des diagonales du parallélogramme : « *si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme* ». On place ainsi le point O milieu du segment $[BC]$ (avec les méthodes préconisées plus en haut).

On trace ensuite la droite (AM) puis le cercle de centre M et de rayon AM. Il intersecte la droite (AM) en un point D. On a ainsi, M milieu du segment $[AD]$ et $ABDC$ est un parallélogramme.

Les droites (CD) et (AB) sont parallèles et ainsi la droite (CD) est la droite recherchée.



□

1. On peut aussi tracer le cercle de centre C et de rayon BC. Si c'est ainsi, il faudra remplacer le point A par le point B dans le texte qui suit.

Proposition 21.6.
Soit A, B et C trois points distincts constructibles RC avec $A \neq B$. Les bissectrices de ces deux droites sont constructibles RC.

Pour justifier la construction RC de la bissectrice, on aura besoin du théorème de la bissectrice.

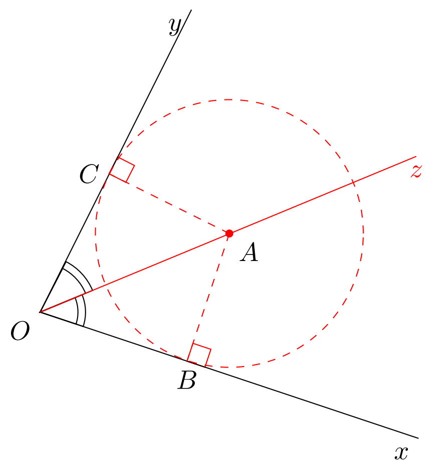
Lemme 21.7. *Théorème de la bissectrice*
Soit (d) et (d') deux droites s'intersectant en O. On note $\widehat{xOy}$ l'angle formé par les deux demi-droites d'origine O et de direction la droite (d) (resp. la droite (d')). M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ si et seulement si M est à égale distance des côtés de cet angle.

◊ *Démonstration du lemme 21.7.* $(\Rightarrow)$ On note $[Oz)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. A est un point de $[Oz)$. Soient B et C les projetés orthogonaux de A respectivement sur $[Ox)$ et sur $[Oy)$.

— On sait que la distance de A à $[Ox)$ est AB ; de même la distance de A à $[Oy)$ est AC.
— Par hypothèse, $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha$.
— Les relations trigonométriques dans les triangles rectangles OAC et OAB donnent :

$$AB = OA \times \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad AC = OA \times \sin(\alpha)$$

donc $AB = AC$.



$(\Leftarrow)$ On considère A sur la droite équidistante des deux côtés de l'angle $\widehat{xOy}$, B et C les projetés orthogonaux du point A respectivement sur $[Ox)$ et sur $[Oy)$. Si A est à la même distance des côtés de l'angle $\widehat{xOy}$ alors $AB = AC$.
Dans le triangle ABO rectangle en B, on a la relation trigonométrique : $AB = OA\sin(\widehat{xOz})$. Dans le triangle ACO rectangle en C, on a aussi le même type de relation trigonométrique : $AC = OA\sin(\widehat{yOz})$. Comme $AB = AC$, on a alors :

$$OA\sin(\widehat{xOz}) = OA\sin(\widehat{yOz}) \Leftrightarrow \sin(\widehat{xOz}) = \sin(\widehat{yOz}).$$

Or les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{yOZ}$ sont des angles aigus donc :

$$\sin(\widehat{xOz}) = \sin(\widehat{yOz}) \Leftrightarrow \widehat{xOz} = \widehat{yOz}.$$

Ainsi, la demi-droite $[Oz)$ est une bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

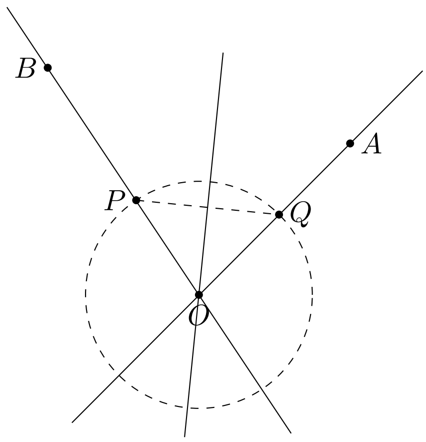
□

Avec ce lemme, on peut justifier la construction RC de la bissectrice :

◊ *Démonstration de la proposition 21.6.* On considère O, A et B trois points non alignés. On veut tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Pour cela, on pointe le compas en O et on prend un écartement quelconque. On trace un arc de cercle de centre O parcourant les deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

Soit P (resp. Q) le point d'intersection de cet arc de cercle avec la demi-droite $[Ox)$ (resp. $[Oy)$). On trace ensuite la médiatrice du segment $[PQ]$ qui constitue la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ (la justification du fait que la médiatrice du segment $[PQ]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ se trouve dans la démonstration du lemme 21.7).



□

21.2.3 Construction d'un dodécagone *RC*

▶ **Exercice 21.8.**
Le but de cet exercice de tracer un dodécagone avec une règle et un compas.

1. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $OI = 3$.
2. Tracer le triangle équilatéral OIA.
3. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AOI}$, elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point B.

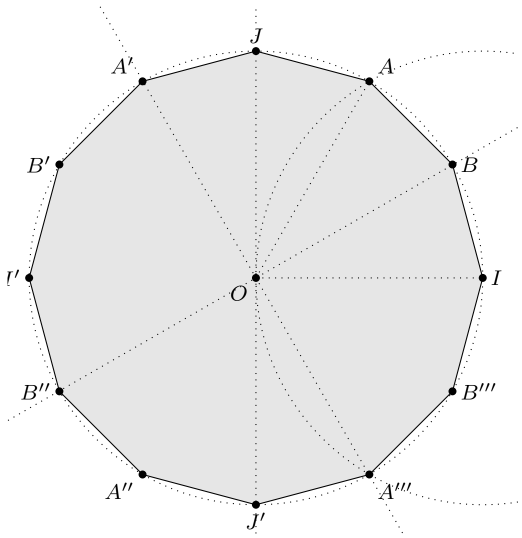
À ce stade, on peut tracer le dodécagone en reportant la longueur AB tout au long du cercle et ainsi trouver les sommets de proche en proche.

◊ *Construction de GeoGebra.*

```
O = (0,0)
I = (3,0)
Cercle[O,I]
Cercle[I,O]
A = Intersection[c,d,1]
Segment[O,A]
Segment[O,I]
Bissectrice[a,b]
SoitVisibleDansVue[f,1,false]
B = Intersection[c,e,2]
Perpendiculaire[O,b]
J = Intersection[c,g,2]
SoitVisibleDansVue[f,1,false]
A' = Symétrie[A,g]
B' = Symétrie[B,g]
I' = Symétrie[I,g]
A'' = Symétrie[A,O]
```

```
B'' = Symétrie[B,O]
J' = Symétrie[J,O]
A''' = Symétrie[A,b]
B''' = Symétrie[B,b]
```

□



L'aire du dodécagone permet d'approximer π.

◊ *Approximation de π avec l'aire du dodécagone.* On remarque que le triangle OBB'' est un triangle équilatéral car $OB = OB'''$ et $\widehat{BOB'''} = 60°$. Ainsi, $BB''' = 1$. La hauteur BK du triangle OAB est égale à $\frac{1}{3}$ et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{4}$. Le dodécagone a donc une aire égale à 3. Elle est inférieure à l'aire du cercle $\mathscr{C}$ d'où $3 < \pi$. On admettra que :

$$OH = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

En choisissant $OP = \dfrac{1}{\cos \pi/12} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, on construit un dodécagone tangent extérieurement au cercle $\mathscr{C}$ d'aire 3, d'où $OI^2 \simeq 3,22$.

Ainsi, $3 < \pi < 3,22$. □

21.3 Un œuf

Cette activité peut être réalisée en classe de troisième.

▶ **Exercice 21.9.**

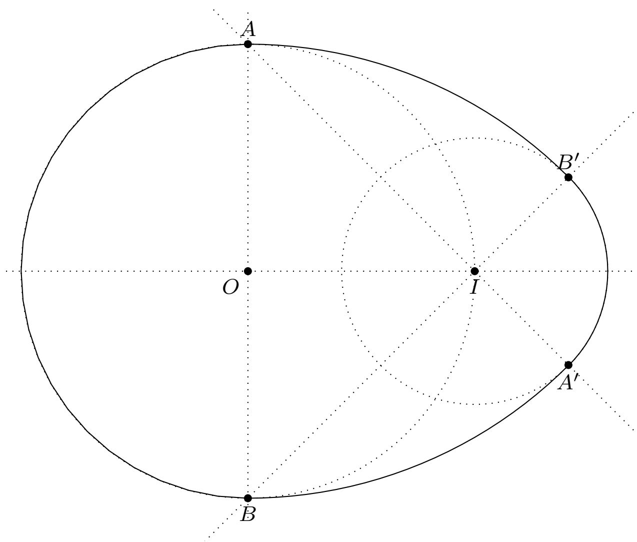
1. Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3.
2. Soit I un point du cercle $\mathscr{C}$, tracer un $\mathscr{C}'$ de centre I et de rayon $6 - 3\sqrt{2}$.
3. Placer A et B tels que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ perpendiculaire à (OI).
4. Tracer les droites (AI) et (BI).
5. Soit A' l'intersection de (BI) et du cercle $\mathscr{C}'$ tel que A' n'appartient pas au segment $[BI]$.
6. Soit B' l'intersection de (AI) au cercle $\mathscr{C}'$ tel que B' n'appartient pas au segment $[AI]$.
7. Tracer les arcs de cercle suivants :
   (a) l'arc de cercle de centre A passant par B et B' ;
   (b) l'arc de cercle de centre$B$ passant par A et A' ;
   (c) l'arc de cercle de centre I passant par A' et B' ;

(d) l'arc de cercle de centre O passant par A et B.

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
O=(0,0)
Cercle[O,3]
I = Point(c)
Cercle[I,6-3*sqrt(2)]
Droite[O,I]
Perpendiculaire[O,a]
A = Intersection[c,b,2]
B = Intersection[c,b,1]
Droite[A,I]
Droite[B,I]
A' = Intersection[d,e,2]
B' = Intersection[d,f,2]
ArcCercle[B,B',A]
ArcCercle[I,B',A']
ArcCercle[A,B,A']
ArcCercle[O,B,A]
```

□



21.4 Triangle d'or et pentagone

La construction du pentagone suivante est due à Euclide. L'élément de base de la construction est un triangle d'or, c'est-à-dire un triangle isocèle dont les angles avec la base sont double de l'angle au sommet.

21.4.1 Construction du triangle d'or

Soient A et C deux points du plan.

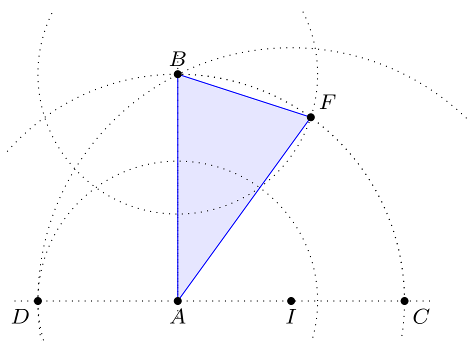
1. Placer I le milieu de $[AC]$.
2. Tracer la droite (Δ) perpendiculaire à (AC) passant par A. Construire le point B sur (Δ) tel que $AC = AB$.
3. Placer le point D sur (AC) tel que $IB = ID$.
4. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{CB}$ de centre A.
5. Placer le point F sur l'arc $\overset{\frown}{CB}$ tel que $BF = AD$.

Le triangle ABF est un triangle d'or.

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
C = (3,0)
I = MilieuCentre[A,C]
f = Droite[A,C]
g = Perpendiculaire[A,f]
c = Cercle[A,C]
B = Intersection[c,g,2]
d = Cercle[I,B]
D = Intersection[d,f,1]
h = Segment[A,D]
e = Cercle[B,h]
F = Intersection[e,c,1]
Polygone[A,B,F]
```

□



◊ *Justification de la construction.* D'après le théorème de Pythagore :

$$IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$AD = BF = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$$

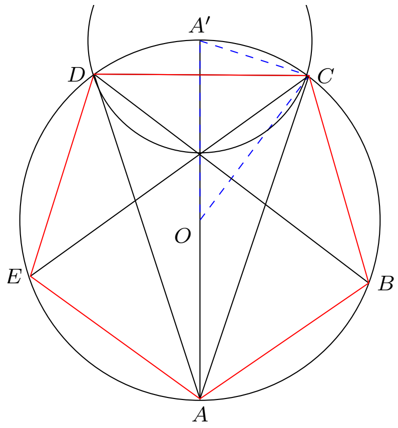
où φ est le nombre d'or.

Les dimensions du triangle ABF sont donc 1 ; 1 et $\frac{1}{\varphi}$. C'est bien un triangle d'or. □

21.4.2 Construction du pentagone

1. À partir du triangle $OA'C$, construire le triangle d'or CDA grâce à l'arc de cercle de centre A' et de rayon $A'C$.

2. Nous avons donc l'un des cotés du pentagone CD. Il suffit maintenant de reporter la longueur CD en C (resp. en D) pour obtenir les points B (resp. E).



21.5 Carré dont les côtés passent par quatre points

Le problème est le suivant : « Soient quatre points A, B, C, D (qu'on suppose deux à deux distincts). Tracer quatre droites passant par chacun des points de telle sorte qu'elles déterminent un carré ».

Pour cela,

1. Construire le point D_1 tel que (DD_1) soit perpendiculaire à (BC) et tel que $BC = DD_1$.
2. Tracer la droite (AD_1).
3. Tracer la droite perpendiculaire à (AD_1) passant par B. On note M l'intersection de (AD_1) et de la perpendiculaire tracée.
4. Tracer la droite perpendiculaire à (BM) passant par D. On note Q l'intersection de (BM) et de la perpendiculaire tracée.
5. Tracer la droite perpendiculaire à (DQ) passant par C. On note P l'intersection de (DQ) et de la perpendiculaire tracée et N l'intersection de (AM) et de la perpendiculaire tracée.

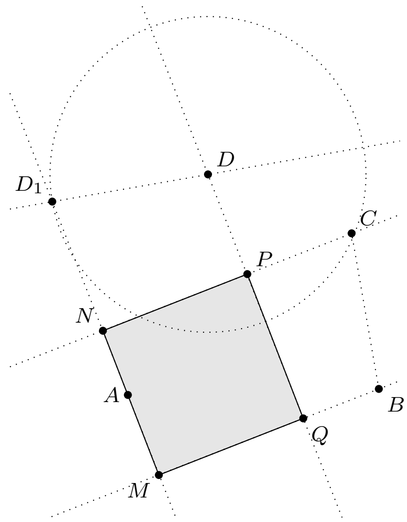
◊ *Construction avec GeoGebra.* On place tout d'abord quatre points A, B, C et D distincts deux à deux avec l'outil « Nouveau point ».

```
Segment[B,C]
Perpendiculaire[D,a]
Cercle[D,a]
Intersection[b,c]
```

On obtient donc deux nouveaux points. On choisit un de ces deux points (qu'on nommera D_1) et on n'affiche pas l'autre point.

```
Droite[A,D_1]
Perpendiculaire[B,d]
M = Intersection{d,e]
Perpendiculaire[D,e]
Q = Intersection{e,f]
Perpendiculaire[C,f]
P = Intersection[f,g]
N = Intersection[g,d]
Polygone[M,N,P,Q]
```

□



♢ *Justification de la construction.* Par construction, $MNPQ$ est un rectangle (trois angles droits). On montre que le rectangle $MNPQ$ a deux côtés consécutifs de même longueur. On note B' le projeté orthogonal de B sur (NP) et D' le projeté orthogonal de D sur (MN).

Les triangles $B'BC$ et $D'DD_1$ ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires. L'hypoténuse $[BC]$ est perpendiculaire à $[DD_1]$ avec $BC = DD_1$. Les triangles sont semblables et $BB' = DD'$. Ce qui prouve que deux côtés consécutifs ont même longueur : $MNPQ$ est un carré. □

21.6 Quelques quadratures du carré

Définition 21.10.
Soit $\mathscr{F}$ une figure rectiligne donné. On appelle quadrature du carré relatif à $\mathscr{F}$, un carré dont l'aire est égale à l'aire de $\mathscr{F}$.

21.6.1 Une construction dite de Sulbastra

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le carré $ADFE$.
2. Tracer la médiatrice de $[CF]$. Elle coupe $[CF]$ en H et $[EB]$ en G.
3. Tracer le rectangle $DFIJ$ tel que $DF = HG$ et $FI = HC$.
4. Tracer le carré $AGKJ$.
5. Tracer le cercle de centre J passant par A et coupe $[DH]$ en L.

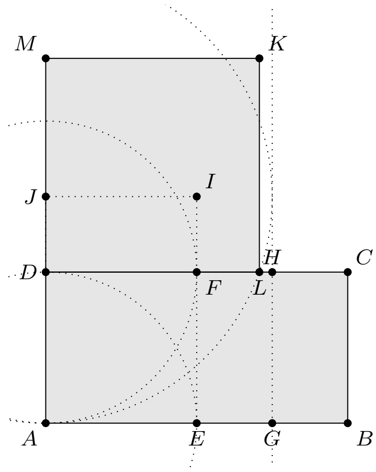
$[DL]$ est le côté du carré qui a même aire que le rectangle $ABCD$.

♢ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Cercle[A,D]
Intersection[e,a]
Cercle[D,A]
Intersection[f,c]
Segment[E,F]
Médiatrice[C,F]
G = Intersection[a,h]
```

```
H = Intersection[c,h]
J = (0,3)
I = (2,3)
Segment[I,J]
Segment[J,D]
Segment[F,I]
Cercle[J,A]
L = Intersection[p,c]
Polygone[D,L,4]
```

□



21.6.2 La construction d'Euclide

On donne une interprétation moderne de la construction d'Euclide pour la quadrature d'un carré. On se donne $ABCD$ un rectangle.

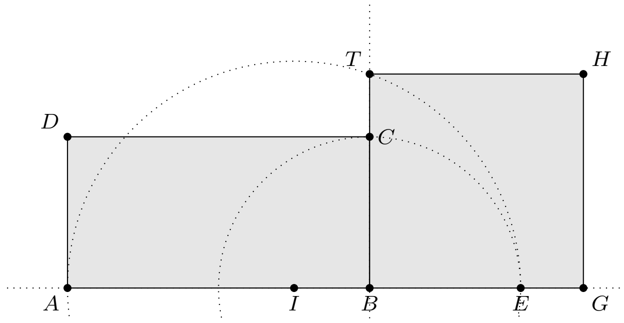
1. Tracer la droite (AB).
2. Tracer un cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B et de rayon $[BC]$. Il intersecte la droite (AB) en E tel que E n'appartient pas au segment $[AB]$.
3. Tracer un cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[AE]$.
4. Tracer la droite (BC). Elle intersecte le cercle $\mathscr{C}_2$ en T.

Ainsi BT est le côté du carré qui a même aire que le rectangle $ABCD$.

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
B = (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Polygone[A,B,C,D]
Droite[A,B]
Cercle[B,C]
E = Intersection[f,e,2]
I = MilieuCentre[A,E]
Cercle[I,A]
Droite[B,C]
T = Intersection[g,h,2]
Polygone[T,B,4]
```

□



21.6.3 Quadrature du carré de Wallis

Soit $ABCD$ un rectangle.

1. Tracer le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre A et de rayon $[AD]$. Il intersecte $[AB]$ en D'.
2. Tracer la médiatrice de $[D'B]$. Soit O un point de cette médiatrice.
3. Tracer le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre O qui passe par D'. B appartient aussi au cercle tracé car $OD' = OB$ (O est sur la médiatrice de $[D'B]$).
4. Tracer la tangente au cercle $\mathscr{C}_2$ passant par A.

Démonstration. ◊ La puissance du point A par rapport au cercle est :

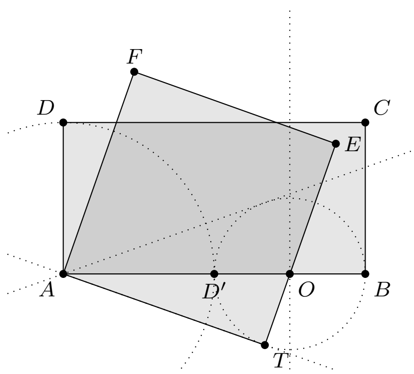
$$AT^2 = AD' \times AB = AD \times AB$$

D'où le carré $ATUV$ a même aire que le rectangle $ABCD$. □

◊ *Construction sur GeoGebra.*

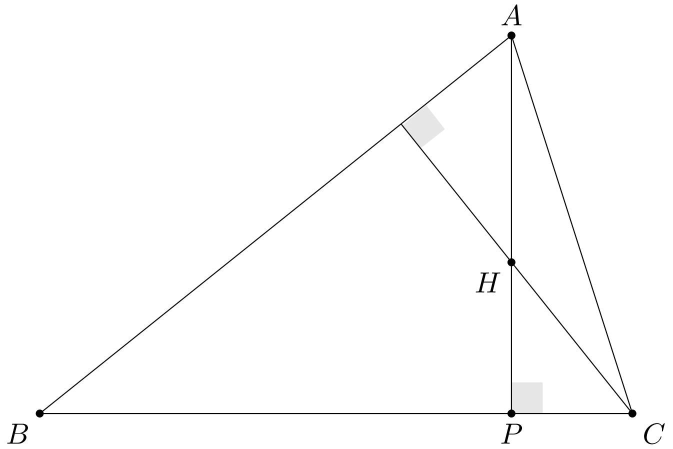
```
A = (0,0)
B= (4,0)
C = (4,2)
D = (0,2)
Cercle[A,D]
D' = Intersection[e,a]
Médiatrice[D',B]
O = Point[f]
Cercle[O,D']
Tangente[A,g]
T = Intersection[g,h]
Polygone[A,T,4]
```

□



21.7 Construction d'un triangle selon certaines conditions

▶ **Exercice 21.11.**
Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que, si on appelle H l'orthocentre et P le pied de la hauteur issue de A, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, H est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm.



Solution. Comme (AP) est la hauteur issue de A, alors ABP est rectangle en P. On a, de plus : $AP = 5$ cm t $AB = 8$ cm donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BP^2 = BA^2 - AP^2 = 8^2 - 5^2 = \sqrt{39}.$$

Pour construire le point B, on peut tracer $AP = 5$ cm ($H \in [AB]$ tel que $AH = 3$ cm) puis une droite perpendiculaire à (AP) passant par P. Avec un écartement de 8 cm, on point en A et on fait une marque à l'intersection de la droite perpendiculaire. On a donc construit le point B.

Pour construire le point C, on peut tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H et l'intersection avec la droite (BC) nous donne le lieu du point C.

On a donc construire le triangle ABC tel que, si on appelle H l'orthocentre et P le pied de la hauteur issue de A, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, H est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm. □

21.8 Autres problèmes de construction

21.8.1 Problème 1

Soit ζ un cercle de centre O ; I est un point du disque ouvert de frontière ζ. Construire les points P et Q de ζ tels que I soit le milieu du segment $[PQ]$.

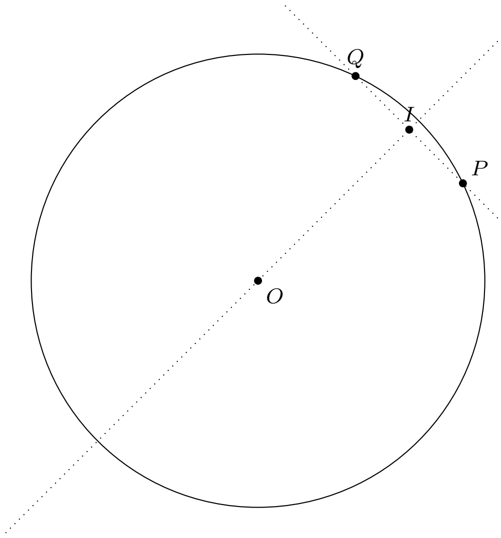
◊ *Observation.* On suppose l'existence de points P et Q de ζ tels que I soit le milieu du segment $[PQ]$.

P et Q ne sont pas confondus car I n'est pas un point de ζ. O est équidistant de P et Q, donc O appartient à la médiatrice $[PQ]$. I étant le milieu de $[PQ]$, la droite (OI) est la médiatrice de (PQ). □

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
O = (0,0)
Cercle[O,3]
I = (2,2)
Droite[O,I]
Perpendiculaire[I,a]
P = Intersection[b,c,1]
Q = Intersection[b,c,2]
```

□



21.8.2 Problème 2

Soient A et B deux points du plan et soit O le milieu du segment $[AB]$. Γ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$. Construire les points P, Q, R et S tels que :

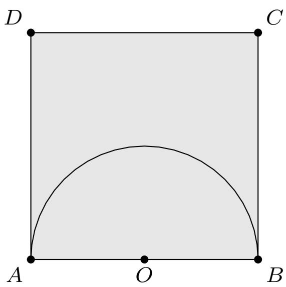
— P et Q appartiennent à (AB)

— R et S appartiennent à Γ

— $PQRS$ est un carré.

Démonstration. ♢ La difficulté provient du fait que les trois conditions doivent être simultanément satisfaites. L'idée est d'en oublier une dans un premier temps.

On construit aisément un carré ayant deux sommets sur $[AB]$, les deux autres n'appartenant pas nécessairement à Γ ; on construit, par exemple, celui de côté $[AB]$ et inclus dans le demi-plan de frontière (AB) contenant Γ. On note que Γ est nécessairement « à l'intérieur » de $ABCD$.



Comment transformer $ABCD$ en un carré vérifiant toutes les conditions imposées ?

Soient R le point d'intersection de la droite (OC) et de Γ, S le point d'intersection de la droite (OD) et de Γ. Q et P les projetés orthogonaux respectifs de R et de S sur la droite (AB). Les points O, R et C sont alignés, dans cet ordre ; il existe donc une homothétie h de centre O et de rapport $k > 0$ transformant C en R.

On a donc : $\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OC}$; c'est-à-dire $R = h(C)$.

De plus, on sait :

— $OR = OS$ (car $[OR]$ et $[OS]$ sont des rayons d'un même cercle),

— $OC = OD$ (car les triangles rectangles BOC et AOD sont isométriques et ont respectivement pour hypoténuses $[OC]$ et $[OD]$),

— O, S, D sont alignés dans le même ordre, donc $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OD}$; c'est-à-dire $S = h(D)$.

D'autre part, les droites (PS) et (AD) sont parallèles, car toutes deux perpendiculaires à (AB) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}, \quad \text{c'est-à-dire } P = h(A)$$

De même on montre :

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OB}, \quad \text{c'est-à-dire } Q = h(B)$$

On a prouvé que P, Q, R, S sont les images respectives de A, B, C, D par h. Comme l'homothétique d'un carré est un carré, $PQRS$ est un carré.

Finalement, on a bien :

— P et Q sont des points de (AB) ;

— R et S sont des points de Γ ;

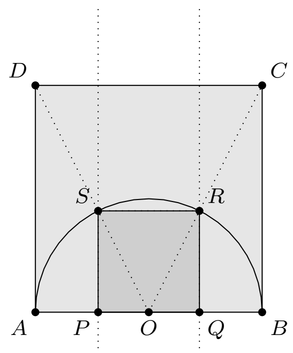
— $PQRS$ est un carré.

□

◊ *Construction sur GeoGebra.*

```
A = (0,0)
B = (3,0)
C = (3,3)
D = (0,3)
O = MilieuCentre[A,B]
Demi-Cercle[A,B]
Segment[O,C]
Segment[O,D]
R = Intersection[e,f]
S = Intersection[e,g]
Segment[R,S]
Perpendiculaire[R,h]
Perpendiculaire[S,h]
P = Intersection[j,a]
Q = Intersection[i,a]
Polygone[P,Q,R,S]
```

□



LEÇON

22

Exemples de problèmes d'alignement, de parallélisme.

Préambule

Niveau : tous niveaux

Prérequis : notions de base de géométrie

Références :

[1] P. Debart, *Montrer un alignement.* [url]

[2] Educastream, *Applicaitons du barycentre, alignement de points.* [url].

[3] D. Vergès, *Annales BAC, Brevet, BTS.* APMEP. [url].

[4] Unknown, *Chapitre n° 6 : « Perpendiculaires et parallèles ».* Collège Lurcat de Sarcelles. [url]

[5] R. Brault & al., *Phare 6^e cycle 3.* Hachette Education, ed 2016.

[6] G. Julia, *Épreuve sur dossier au CAPES de Mathématiques.* [url]

[7] Y. Thomas, *Problèmes de construction.* Primaths. [url]

[8] Collectif de professeurs Sesamaths, *Sesamaths, 2nde.* Magnard, 2013.

22.1 Problèmes d'alignement

22.1.1 Méthodes pour prouver l'alignement de trois points

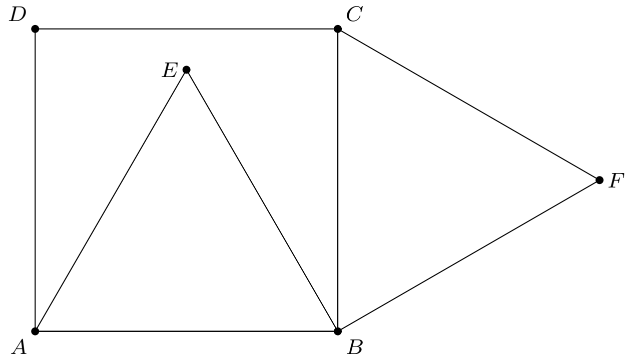
Définition 22.1.
On dit que trois points A, B et C sont alignés si le point C appartient à la droite (AB).

On peut démontrer que trois points A, B et C sont alignés par plusieurs manières :

1. Trois points A, B et C sont alignés si les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
2. Trois points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3. Trois points A, B et C sont alignés si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul ou plat.
4. Trois points A, B et C sont alignés si si les angles des droites (AB) et (AC) avec une troisième droite (AD) sont les mêmes. Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux, on retrouve le parallélisme des droites (AB) et (AC).
5. Si cet angle est droit, on a le cas suivant. Trois points A, B et C sont alignés si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires à une même troisième.
6. Trois points A, B et C sont alignés s'ils sont les images de trois points alignés par une transformation (isométrie, homothétie, similitude).
7. Si on a $AB + BC = AC$ ((in)égalité triangulaire), le point B appartient au segment $[AC]$.
8. Trois points A, B et C sont alignés si les coordonnées du point C vérifient l'équation de la droite (AB).
9. On peut utiliser le barycentre et les complexes.

22.1.2 Un problème vu sous plusieurs angles

▶ **Exercice 22.2.** *Dossier CAPES 2014*
On considère le carré $ABCD$. On place le point E dans le carré $ABCD$ tel que ABE est un triangle équilatéral. On place le point F à l'extérieur du carré $ABCD$ tel que BCF est un triangle équilatéral
Montrer que les points D, E et F sont alignés.



◊

Avec les angles. 1. On peut remarquer que :

$$\widehat{DEF} = \widehat{DEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BEF}.$$

On sait que : DAE est isocèle, son angle $\widehat{DAE} = 30°$ et donc les deux autres, ici $\widehat{DEA}$ valent $75°$.

Les angles du triangle équilatéral AEB valent $60°$ (ici $\widehat{AEB}$).

Le triangle EBF est un triangle rectangle isocèle en B et $\widehat{BEF} = 45°$. Ainsi :

$$\widehat{DEF} = 75° + 60° + 45° = 180°.$$

Ainsi, l'angle $\widehat{DEF}$ est plat et les points D, E et F sont alignés.

2. On peut calculer les mesures des angles $\widehat{CDF}$ et $\widehat{CDE}$. Le triangle isocèle CDF a un angle au sommet de $90° + 60° = 150°$. Les deux autres angles égaux sont de :

$$\frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

D'où $\widehat{CDF} = 15°$.

Le triangle isocèle ADE a un angle au somme $\widehat{DAE}$ de $30°$. Les deux autres angles égaux sont de $75°$. Dans l'angle droit $\widehat{ADC}$, $\widehat{CDF}$ est le complémentaire de $\widehat{ADE}$ d'où : $\widehat{CDE} = 90° - 75° = 15°$.

Les angles $\widehat{CDF}$ et $\widehat{CDE}$ sont égaux, les points D, E et F sont alignés.

□

Géométrie analytique. On se place dans le repère $(A, \widehat{AB}, \widehat{AD})$ les coordonnées des points sont $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

1. On calcule les coordonnées des points E et F. Pour cela, on peut utiliser le théorème de Pythagore en plaçant H le pied de la hauteur du triangle ABE issue de E, H est aussi le milieu du segment $[AB]$ (H appartient à la médiatrice du segment $[AB]$).

$$AE^2 = AH^2 + EH^2 \Leftrightarrow EH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

D'où $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit les coordonnées de $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On peut faire de même pour les coordonnées de F, on trouve $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$:

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. On montre que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires :

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} + 1\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

4. Conclusion : les vecteurs sont colinéaires, les points D, E et F sont alignés.

□

22.1.3 Barycentres

Définition 22.3. *Barycentres de n points*
Si a_1, a_2, ..., a_n sont n réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$ alors le point G tel que :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \tag{22.1}$$

est appelé *barycentre* des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), ..., (A_n, a_n).
Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, on dit alors que G est l'*isobarycentre* des points A_1, A_2, ..., A_n.

Propriété 22.4.
Si M est un point quelconque et G est le barycentre des points pondérés (A_1, a_i) alors :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots a_n\overrightarrow{MA_n})$$

L'égalité précédente est appelée *forme réduite du barycentre.*

Théorème 22.5.
Si G est le barycentre de n points pondérés, on peut remplacer p de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients de ces points.

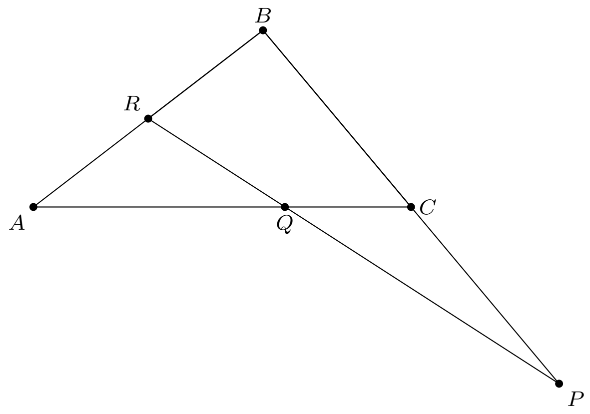
Théorème 22.6. *Coordonnées du barycentre*
Soit A_1, A_2, ..., A_n n points dans l'espace. On note, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, (x_i, y_i, z_i) les coordonnées de A_i. Le barycentre G du système pondéré (A_1, a_1), (A_2, a_2), ..., (A_n, a_n) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_ix_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \; y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_iy_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \; z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_iz_i}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

Propriété 22.7.
Si A et B sont deux points distincts, tout barycentre G de (A, a) et de (B, b) avec $a + b \neq 0$ à la droite (AB) est aligné avec A et B. Deux points et leur barycentre sont alignés.

Exemple 22.8.

Soient ABC un triangle, P le symétrique de B par rapport à C, Q est le point défini par $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et R le milieu de $[AB]$. Montrer que les points P, Q et R sont alignés.



Démonstration. ◊ On peut montrer que Q est le barycentre de P et de R avec des coefficients à déterminer.

P est le symétrique de B par rapport à C donc on a : $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}$, ce qui peut s'écrire $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Le point P est donc le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, -2)$. On en déduit, d'après la propriété de réduction du barycentre :

$$(1-2)\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} - 2\overrightarrow{QC}$$

c'est-à-dire :

$$-\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} - 2\overrightarrow{QC}$$

ou encore

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}.$$

Par ailleurs, R est le milieu du segment $[AB]$ donc :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$$

et, d'après la propriété de réduction du barycentre :

$$2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}$$

On a donc en additionnant membre à membre les deux égalités :

$$\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = (-\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}) + (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}) = \overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC}.$$

Or $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ ce qui équivaut à $3\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA}$ d'où $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{CQ} - 3\overrightarrow{CQ} = \vec{0}$ (Q est donc le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 2)$). On en déduit :

$$\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}.$$

□

22.1.4 Nombres complexes et alignement

Propriété 22.9.
Pour démontrer que A, B et C sont alignés, on peut démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 \pmod{\pi}$$

Exemple 22.10. *Extrait du BAC Nouvelle-Calédonie 2017*
On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
2. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

Démonstration. ♢

1. On a :
$$\frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}}}{\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}} = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^{n+4}} \times \frac{(1-\mathrm{i})^n}{1+i} = \frac{1}{(1-\mathrm{i})^4}$$
et :
$$(1-\mathrm{i})^4 = 1 + 4\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2 + 4\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 1 + 4\mathrm{i} - 6 - 4\mathrm{i} + 1 = 1 - 6 + 1 = -4.$$
D'où :
$$\frac{z_{n+4}}{z_n} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}.$$
2. On doit montrer que $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA_{n+4}}}}{z_{\overrightarrow{OA_n}}}\right) = 0 \mod \pi$. Or :
$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA_{n+4}}}}{z_{\overrightarrow{OA_n}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) = \arg\left(-\frac{1}{4}\right)$$
et $\arg(x) = \pmod{\pi}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :
$$\arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) = \arg\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \mod \pi$$
d'où les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

□

22.1.5 Dossiers de CAPES

▶ **Exercice 22.11.** *CAPES 2013*
On souhaite planter des orangers dans un jardin qui dispose de deux fontaines. Pour simplifier l'irrigation, les orangers à planter doivent être alignés avec les deux fontaines. Pour modéliser la situation, on se place dans un repère orthonormé dans lequel les points $A(10;10)$ et $B(87;31)$ désignent les deux fontaines.

1. Un premier jardinier propose de planter un oranger au point $G(30;16)$. Cette proposition convient-elle ? Justifier votre réponse.
2. Un second jardinier propose de planter autant d'orangers que possible en respectant les deux conditions suivantes :
   — chaque oranger est planté sur le segment situé entre les deux fontaines,
   — chaque oranger est planté sur un point dont les deux coordonnées sont entières.

   Déterminer le nombre maximal d'orangers qu'il est possible de planter en respectant ces deux conditions et préciser leurs coordonnées dans le repère.

Solution. ◊

1. On peut déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{31-10}{87-10} = \frac{21}{77} = \frac{3}{11}$$

puis :

$$10 = \frac{3}{11} \times 10 + b \Leftrightarrow b = 10 - \frac{30}{11} = \frac{110-30}{11} = \frac{80}{11}.$$

La droite (AB) a pour équation cartésienne : $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$. On vérifie que $G(30;16)$ appartient ou non à la droite (AB) :

$$\frac{3}{11} \times 30 + \frac{80}{11} = \frac{90+80}{11} = \frac{170}{11} \approx 15,45.$$

Donc : le premier jardinier ne pourra pas planter l'oranger au point $G(30;16)$.

2. On se propose de déterminer tous les points $(x;y)$ tels que x entier et $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$ soit entier ou encore :

$$11y = 3x + 80 \Leftrightarrow 11y - 3x = 80.$$

On a : $\&textPGCD(3,11) = 1$ donc l'équation diophantienne a une infinité de solutions. On donne la solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$ est :

$$1 = 22 - 21 = 11 \times 2 - 3 \times 7$$

On a alors comme solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$: $x = 7 \times 80 = 560$ et $y = 2 \times 80 = 160$. Ainsi les solutions générales de l'équation diophantienne est :

$$(x,y) = (560 + 11k, 160 + 3k)$$

On cherche les solutions (x,y) tels que $10 < x < 87$ et $10 < y < 31$.

$$\begin{gathered} 560 + 11k > 10 \Leftrightarrow 11k > 10 - 560 \Leftrightarrow 11k > -550 \Leftrightarrow k > -50 \\ 560 + 11k < 87 \Leftrightarrow 11k < 87 - 560 \Leftrightarrow 11k < -473 \Leftrightarrow k < -43 \\ 160 + 3k > 10 \Leftrightarrow 3k > 10 - 160 \Leftrightarrow 3k > -150 \Leftrightarrow k > -50 \\ 160 + 3k < 31 \Leftrightarrow 3k < 31 - 160 \Leftrightarrow 3k < -129 \Leftrightarrow k < -43 \end{gathered}$$

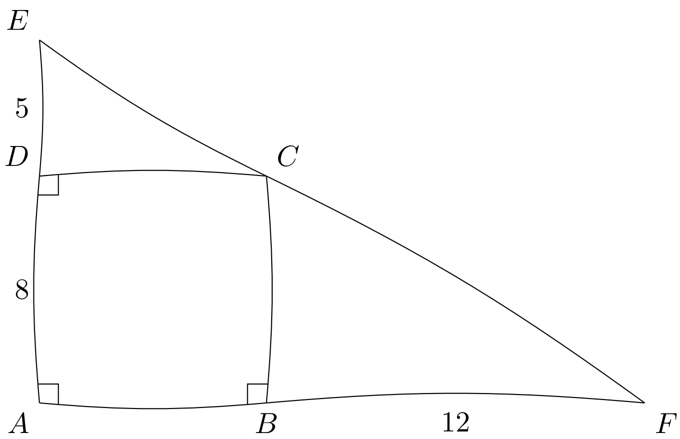
D'où : $-50 < k < -43$ et on obtient les six coordonnées de plantation d'orangers :

k	x	y
-49	21	13
-48	32	16
-47	43	19
-46	54	22
-45	65	25
-44	76	28

On pourra planter des orangers en $(21;13)$, $(32;16)$, $(43;19)$, $(54;22)$, $(65;25)$ et $(76;28)$.

□

▶ **Exercice 22.12.** *CAPES 2015*
La figure ci-contre est dessinée à main levée. Les points A, D, E et A, B, F sont alignés. Les dimensions sont exprimées en cm.



Les points E, C et F sont-ils alignés ?

Solution. ◊ Dans le triangle rectangle DEC, avec le théorème de Pythagore, on a :

$$EC^2 = DC^2 + DE^2 = 8^2 + 5^2 = 89$$

d'où $EC = \sqrt{89}$.

Dans le triangle rectangle CFB, on a :

$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = 12^2 + 8^2 = 208$$

d'où $CF = \sqrt{208}$.

Dans le triangle rectangle FAE, on a :

$$EF^2 = AF^2 + AE^2 = 20^2 + 13^2 = 569$$

d'où $EF = \sqrt{569}$.

Pour montrer que les points E, C et F sont alignés, il faut montrer que le point C vérifie l'inégalité triangulaire sur $[EF]$, c'est-à-dire $EC + CF = EF$. Or :

$$EF = \sqrt{569} \approx 23,854$$
$$EC + CF = \sqrt{89} + \sqrt{208} \approx 23,856$$

D'où $EF \neq EC + CF$, les points E, C et F ne sont pas alignés. □

22.2 Problèmes de parallélisme

22.2.1 Droites parallèles en 6ème

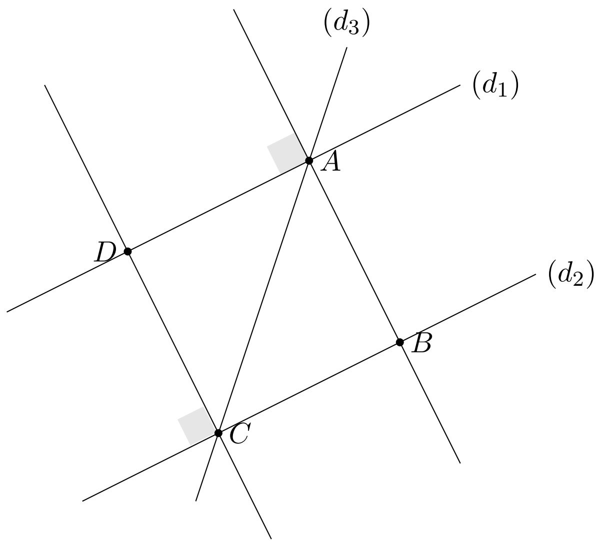
Propriété 22.13.
Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété 22.14.
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété 22.15.
Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

▶ **Exercice 22.16.** *Phare 6*^{e}*, 61 p 151*

1. (a) Tracer deux droites (d_1) et (d_2) parallèles. Une droite (d_3) non perpendiculaire à la droite (d_1) coupe cette droite (d_1) au point A et la droite (d_2) au point C.
   (b) Tracer la perpendiculaire à la droite (d_1) passant par le point A. Elle coupe la droite (d_2) au point B.
2. Que peut-on dire des droites (d_2) et (AB) ? Justifier la réponse.
3. (a) Tracer la perpendiculaire à la droite (d_2) passant par le point C. Elle coupe la droite (d_1) au point D.
   (b) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

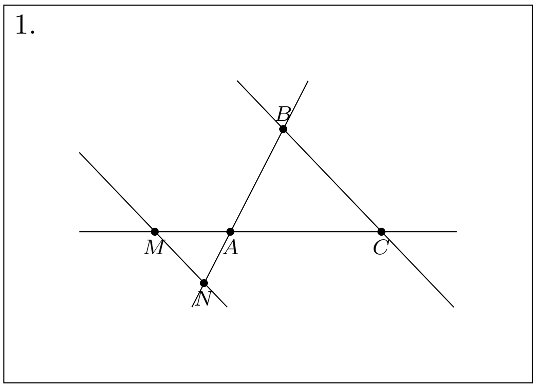


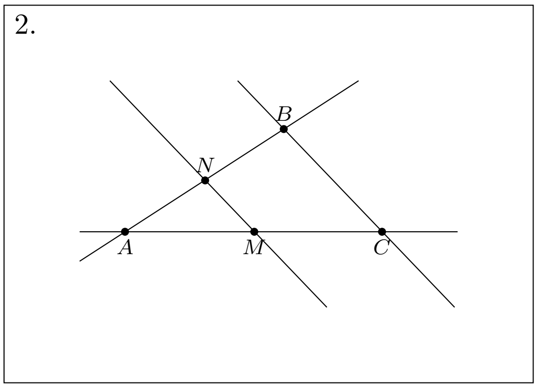
Démonstration. 1. (a) Figure
   (b) Figure
2. On sait que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et que (AB) est perpendiculaire à (d_1) passant par A.
   Or : Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
   Donc : (d_2) est perpendiculaire à (AB).
3. (a) Figure
   (b) On sait que : (CD) est perpendiculaire à (d_2) (donc (CD) est perpendiculaire à (d_1) car (d_1) et (d_2) sont parallèles) et (AB) est perpendiculaire (d_2).
   Or : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.
   Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

□

22.2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 22.17.
Étant donné deux droites sécantes coupées toutes deux par deux droites d et d' (de telle façon que l'on ait deux triangles). Si le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit alors d et d' sont parallèles.





Pour vérifier que AMN est un agrandissement de ABC, il faut montrer qu'il existe un nombre k tel que :

— $AM = kAB$;

— $AN = kAC$;

— $MN = kBC$.

Remarque 22.18.
On peut montrer que dans la configuration où nous sommes, il suffit de montrer qu'il existe un nombre k tel que $AM = kAB$, $AN = kAC$ pour conclure que AMN est un agrandissement de ABC.

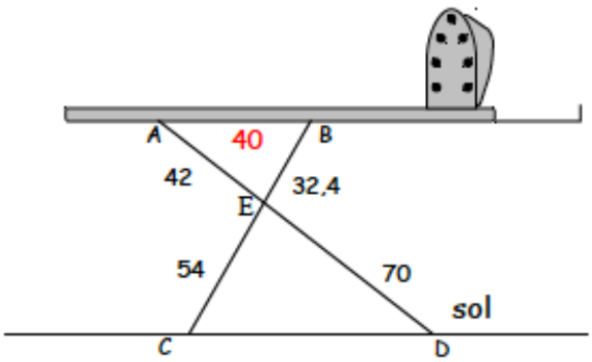
Rédaction type brevet. ◊

— Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

— Si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre

alors on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès et conclure que $(MN)//(BC)$. □

▶ **Exercice 22.19.** *Un exercice de type brevet*
Cette table à repasser est-elle parallèle au sol ?



Solution. ◊ On montre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Pour cela, on sait que ECD et AEB sont deux triangles, A, E et D sont alignés dans cet ordre, B, E et C sont alignés dans cet ordre. De plus : $AB = 40$, $AE = 42$, $BE = 32{,}4$, $CE = 54$ et $ED = 70$.

On calcule les rapports de longueur :

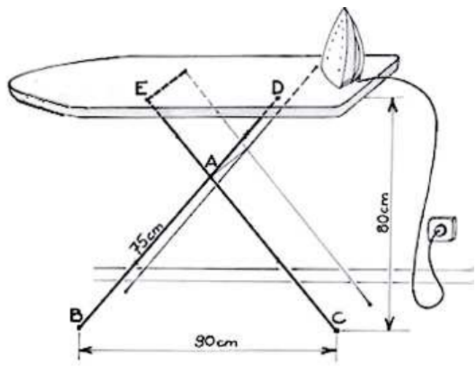
$$\frac{BE}{EC} = \frac{32{,}4}{54} = \frac{6}{10} \quad \text{et} \quad \frac{AE}{ED} = \frac{42}{70} = \frac{6}{10}.$$

On a égalité entre les rapports de longueur : $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AE}{ED}$, d'où (AB) parallèle à (CD). On peut, de plus, calculer l'écartement CD :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{ED} \Leftrightarrow CD = \frac{AB \times ED}{AE} = \frac{40 \times 70}{42} \approx 66{,}6$$

□

▶ **Exercice 22.20.** *Le même exercice à l'oral du CAPES 2017*
Par un mercredi pluvieux, le petit Nicolas a décidé de repasser pour faire une surprise. Il utilise la table à repasser représentée ci-dessous.



Les tiges $[EC]$ et $[BD]$ de même longueur constante sont articulées en A. La longueur est égale à 75 cm. Sous la table, le point D est fixe et le point E peut être déplacé pour ajuster la hauteur. On sait que lorsque BC est égale à 90 cm, la table a une hauteur de 80 cm et est parallèle au sol pour cet écartement.

1. Nicolas voudrait comprendre pourquoi la planche à repasser reste parallèle au sol quelle que soit sa hauteur. Comment pourrais-tu lui expliquer ?
2. Comme Nicolas est plus petit que ses parents, il règle la table pour que la hauteur soit de 60 cm. Calculer alors l'écartement BC.

Solution. Voir la vidéo sur la chaîne YouTube CBMaths [url] □

22.2.3 Colinéarité de vecteurs

Propriété 22.21.
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles.

▶ **Exercice 22.22.** *Sesmaths 2nde*
Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(1;-2)$, $B(-3;1)$, $C(-17;15)$ et $D(-5;6)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

Solution. ◇ On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

On peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. On calcule d'abord les coordonnées des deux vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\1-(-2)\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-17-(-5)\\15-6\end{pmatrix} ; \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$$

On a ainsi :

$$xy' - yx' = -4 \times 9 - 3 \times (-12) = -36 - -36 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

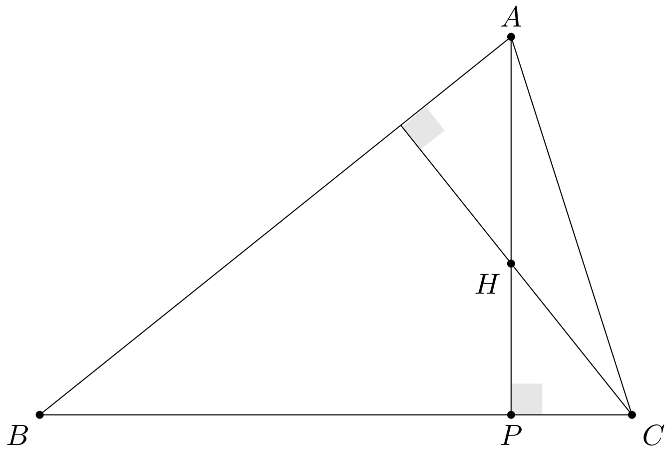
D'où $ABCD$ est un trapèze. □

LEÇON

23 Exemples de problèmes d'intersection en géométrie.

23.1 Pour s'entraîner pour le CRPE

▶ **Exercice 23.1.**
Construire à la règle graduée et au compas un triangle ABC tel que, si on appelle H l'orthocentre et P le pied de la hauteur issue de A, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, H est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm.



Solution. Comme (AP) est la hauteur issue de A, alors ABP est rectangle en P. On a, de plus : $AP = 5$ cm t $AB = 8$ cm donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BP^2 = BA^2 - AP^2 = 8^2 - 5^2 = \sqrt{39}.$$

Pour construire le point B, on peut tracer $AP = 5$ cm ($H \in [AB]$ tel que $AH = 3$ cm) puis une droite perpendiculaire à (AP) passant par P. Avec un écartement de 8 cm, on point en A et on fait une marque à l'intersection de la droite perpendiculaire. On a donc construit le point B.

Pour construire le point C, on peut tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H et l'intersection avec la droite (BC) nous donne le lieu du point C.

On a donc construire le triangle ABC tel que, si on appelle H l'orthocentre et P le pied de la hauteur issue de A, on ait : $AB = 8$ cm, $AP = 5$ cm, H est situé sur $[AP]$ et $AH = 3$ cm. □

23.2 Un problème non géométrique

▶ **Exercice 23.2.**
Au bar de la poste, 5 amis profitent de la terrasse au soleil. Ils ont commandé 2 cafés et 3 thés. Le serveur leur demande $10,10$ €.

Ils sont rejoints par 4 amis qui commandent 3 cafés et 1 thé. Cette fois-ci, le serveur leur demande $7,10$ €.

Afin que les amis puissent payer chacun leur part, déterminer le prix d'un thé et le prix d'un café.

Solution. ♢ Soit x le prix d'un café et y le prix d'un thé. On a alors deux équations :

$$2x+3y=10,10 \quad \text{et} \quad 3x+y=7,10$$

qu'il faut résoudre simultanément. Il faut donc résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y=10,10 \\ 3x+y=7,10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{10,10-2x}{3} \\ y=7,10-3x \end{cases}.$$

Résoudre ce système d'équation revient à calculer les coordonnées du point d'intersection des deux droites $(d_1) : y=\frac{10,10-2x}{3}$ et $(d_2) : y=7,10-3x$.

$$7,10-3x=\frac{10,10-2x}{3} \Leftrightarrow 21,30-9x=10,10-2x \Leftrightarrow 11,2=7x \Leftrightarrow x=\frac{11,2}{7}=1,6.$$

$$y=7,10-3\times 1,6=2,3.$$

Ainsi, un thé coûte 2,30 € et un café coûte 1,60 € □

23.3 Problèmes venant du dossier CAPES

▶ **Exercice 23.3.** *Dossier CAPES session 2014*
Dans un repère orthonormé, placer les points $A(2;6)$, $B(2;0)$, $C(-2;2)$, $D(7;1)$, $E(2;2)$, $F(0;4)$ et $G(5;3)$.

1. Démontrer que les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points A, E, B et A, G, D.
2. (a) Déterminer une équation de la droite (EF) et une équation de la droite (BC). En déduire les coordonnées du point I, intersection des droites (EF) et (BC).
   (b) On appelle J le point d'intersection de (EG) et (BD), et H le point d'intersection de (FG) et (CD). On admet que $J(-13;-3)$ et $H(25;-1)$. Démontrer que les points I, J et H sont alignés.

Solution. 1. On montre que les vecteurs $\overrightarrow{AC}(-4;-4)$ et $\overrightarrow{AF}(-2;-2)$ sont colinéaires :

$$-4\times -2 - -4\times -2 = 8-8=0.$$

Ainsi, les point A, C et F sont alignés.
On peut montrer de même que les vecteurs $\overrightarrow{AE}(0;-4)$ et $\overrightarrow{AB}(0;-6)$ sont colinéaires donc les points A, E et B sont alignés.
On peut montrer de même que les vecteurs $\overrightarrow{AG}(3;-3)$ et $\overrightarrow{AD}(5;-5)$ sont colinéaires donc les points A, G et D sont alignés.

2. On peut déterminer une équation cartésienne de la droite (EF) :

$$a=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{0-2}{4-2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$2=-1\times 2+b \Leftrightarrow b=2+2=4.$$

D'où une équation cartésienne de la droite (EF) est : $y=-x+4$.
On peut déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) :

$$a=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-0}{-2-2}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

$$0=2\times -\frac{1}{2}+b \Leftrightarrow b=1$$

D'où une équation cartésienne de la droite (BC) est : $y = -(1/2)x + 1$.
Ainsi, I (intersection des droites (EF) et (BC)) a pour coordonnées :

$$-\frac{1}{2}x + 1 = -x + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

et

$$y = -6 + 4 = -2.$$

3. J a pour coordonnées $(-13; -3)$ et K a pour coordonnées $(25; -1)$. On montre que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -13-6 \\ -3+2 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} 25-6 \\ -1+2 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De plus :

$$xy' - yx' = -19 \times 1 - (-19) \times 1 = -19 + 19 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires donc les points I, J et K sont alignés.

□

► **Exercice 23.4.** *CAPES 2014*
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(5; 3)$, $B(5; -1)$ et $C(3; 1)$.

1. On appelle G le point d'intersection des médianes issues de A et B dans le triangle ABC. Déterminer les coordonnées de G.
2. On considère les points $F(3; -3)$ et $H(9; -1)$. Montrer que la droite (BG) est une hauteur du triangle FBH.

Solution. ◊

1. Il faut déterminer les coordonnées des points resp. I, resp. J et resp. K (resp. milieu du segment $[AB]$, resp. segment $[AC]$, resp. segment $[BC]$)

$$I\left(\frac{5+5}{2}; \frac{3+(-1)}{2}\right) \; ; \; I(5; 1)$$

$$J\left(\frac{5+3}{2}; \frac{3+1}{2}\right) \; ; \; J(4; 2)$$

$$K\left(\frac{5+3}{2}; \frac{-1+1}{2}\right) \; ; \; K(4; 0)$$

G est l'intersection des droites (IC) et (JB). Une équation cartésienne de (IC) est $y = 1$ et une équation cartésienne de (JB) est $y = 14 - 3x$. D'où les coordonnées de G sont :

$$14 - 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}.$$

$$y = 1.$$

2. On démontre que les droites (BG) et (FH) sont perpendiculaires. Pour cela, on peut montrer que $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$. Or :

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FH} = -\frac{2}{3} \times 6 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$. Le produit scalaire $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{FH}$ est nul donc les droites (BG) et (FH) sont perpendiculaires et ainsi, (BG) est une hauteur du triangle FBH.

□

▶ **Exercice 23.5.** *CAPES 2016*

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1;2;3)$, $B(2;-1,0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Solution. Voir la vidéo sur la chaîne YouTube CBMaths [url] □

LEÇON

24

Pourcentages et taux d'évolution.

Préambule

Niveau : transversal

Prérequis : notion de proportionnalité, suites numériques (suites arithmético-géométriques, limites de suites), logarithmes, probabilités conditionnelles, cercle trigonométrique, résolution d'équations

Références :

[1] A. Abouhazim, *Pourcentages et taux d'évolution*, 1ère ES. [url]

[2] D. Pinel, *Chapitre II : Taux d'évolution - Indices*, Terminale STG. URL : `http://mathemitec.free.fr/index.php`

[3] Unknown, *Chapitre 1 : Taux et Indices.* Terminale STG. [url]

[4] J.-P. Goulard, *Taux d'évolution.* [url]

[5] M. Imbert, *Resumé n° 1 : POURCENTAGES : proportions, évolutions, indices.* Terminale STMG. [url]

[6] Unknwon, *Chapitre I : Evolution en pourcentage.* [url]

[7] Unknown, *Chap I : Taux d'évolution.* Terminale STG, Année 2006-2007, LPO Jean Rostand Mantes-La-Jolie. [url]

[8] Unknwon, *Chapitre 1 : Taux d'évolution et indice.* Terminale STG, 2006-2007, Lycée Arthur Varoquaux, 54510 Tomblaine, Meurthe et Moselle, académie Nancy-Metz. [url]

[9] H. Gringoz & al, *Manuel Sesamaths, 2nde.* Magnard 2019.

[10] D. Vergès, *BAC ES, Asie 2018*, Exercice 30. [url]

[11] M. Sablik, *TD Probabilités conditionnelles.* IUT Aix-en-Provence, DUT Informatique, Année 2014-2015. [url]

[12] C. Monie, *Construire un diagramme circulaire.* [url]

24.1 Pourcentages, proportionnalité

24.1.1 Définition

Définition 24.1.

La part d'une partie A d'un tout B est :

$$\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } B}.$$

Dire que A vaut $t\%$ de B signifie que $\frac{A}{B} = \frac{t}{100}$, c'est-à-dire $A = B \times \frac{t}{100}$.

Exemple 24.2.
Dans une classe de 30 élèves, il y a 18 filles. La part des filles dans la classe est :

$$t = \frac{18}{30} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Il y a donc 60% de filles dans la classe.

Remarque 24.3.
On exprime une part ou une proportion de trois façons :

— en *fraction* : les trois cinquième de la classe sont des filles.

— en *pourcentage* : 60% des élèves sont des filles

— en *écriture décimale* : si la part des filles est la même parmi les 145 élèves de 1ère ES-L, alors il y a $0,6 \times 145 = 87$ filles en 1ère ES-L.

24.1.2 Prendre un pourcentage d'une quantité

Définition 24.4. *Prendre un pourcentage d'une quantité*

Prendre $t\%$ d'une quantité revient à multiplier celle-ci par $\frac{t}{100}$.

Exemple 24.5.
Le marchand de vêtements est généreux. 4% de ses bénéfices reviennent à une association caritative. Pour un pantalon vendu, il faut $1,5$€ de bénéfices. Ainsi, il reversera $1,5 \times \frac{4}{100} = 0,06$ soit 6 centimes à l'association caritative.

24.1.3 Rapport avec la proportionnalité

Remarque 24.6. Tableau de proportionnalité
On peut utiliser un *tableau de proportionnalité* pour calculer des pourcentages. Il faut juste ramener le total à 100.

Exemple 24.7.
On peut illustrer l'exemple 24.2 par un tableau de proportionnalité :

Filles	18	t
Total	30	100

24.2 Évolutions et pourcentages

24.2.1 Coefficient multiplicateur d'une évolution

Il est question ici d'augmentation de de diminution d'une grandeur ou d'une quantité pendant une période. Connaissant une valeur initiale, on cherche à déterminer la nouvelle valeur liée à l'augmentation ou la diminution : on a alors à faire avec une *évolution*.

Propriété 24.8.
Appliquer une *augmentation* de $t\%$ à une grandeur, revient à la multiplier par $1+\frac{t}{100}$.

Appliquer une *diminution* de $t\%$ à une grandeur, revient à la multiplier par $1-\frac{t}{100}$.

Démonstration. ◊ Soient V_i et V_f deux nombres réels strictement positifs. On note V_i la valeur *initiale* (ou de départ) et V_f la valeur finale (ou d'arrivée) d'une certaine grandeur.

— Si on applique une augmentation de $t\%$ à V_i, on obtient :

$$V_f = V_i + t\% \text{ de } V_i = V_i + \frac{V_i}{100}.$$

On remarque que le facteur commun des deux termes de la somme est V_i donc on peut factoriser par V_i, ce qui donne :

$$V_f = \left(1+\frac{t}{100}\right) \times V_i.$$

On peut faire le même raisonnement pour l'application d'une diminution de $t\%$ à V_i, on obtient :

$$V_f = \left(1-\frac{t}{100}\right) V_i$$

□

Exemple 24.9.
Une augmentation de 5% revient à multiplier par : $1+\frac{5}{100} = 1,05$.

Une diminution de 8% revient à multiplier par : $1-\frac{8}{100} = 0,92$.

Définition 24.10.
Soient V_i et V_f les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Les coefficients :

$$k = \left(1+\frac{t}{100}\right) \text{ ou } k = \left(1-\frac{t}{100}\right)$$

s'appellent les *coefficients multiplications* qui permettent de passer de V_i à V_f.

Ce qui donne dans les deux cas :

$$V_f = k \times V_i.$$

Exemple 24.11.
Un objet vaut 12 €. Son prix a augmenté de 4%. Son prix après augmentation est de :

$$12 \times \left(1+\frac{4}{100}\right) = 12 \times 1,04 = 12,48 \text{ €}.$$

Remarques 24.12.

— Une *augmentation* correspond à un coefficient multiplicateur $k > 1$.

— Une *diminution* correspond à un coefficient multiplicateur $0 < k < 1$.

— « Coefficient multiplicateur » sera abrégé par « CM »

24.2.2 Taux d'évolution

Définition 24.13.
Soit V_i et V_f les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors le *taux d'évolution* T qui permet de passer de V_i à V_f est défini par :

$$T = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

Le taux d'évolution exprimé en *pourcentage* de V_i à V_f est égal à $t\%$ où :

$$t = T \times 100 \text{ ou encore : } t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100.$$

Exemple 24.14.
Un smartphone a vu son prix augmenté de 250 € à 280 €. Pour déterminer le pourcentage d'augmentation, on peut résoudre l'équation d'inconnue p suivante :

$$\begin{aligned} 250\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 280 &\Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \frac{280}{250} \\ &\Leftrightarrow \frac{p}{100} = 1,12 - 1 \Leftrightarrow p = 12. \end{aligned}$$

Le prix du smartphone a augmenté de 12%.

Remarque 24.15. Application de la formule
En appliquant la formule donnée précédemment, on obtient :

$$t = \frac{280 - 250}{250} \times 100 = \frac{30}{250} \times 100 = 12.$$

Définition 24.16. *Variations*
On reprend les notations de la définition précédente.

— $V_f - V_i$ s'appelle la *variation absolue* ;

— $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$ s'appelle la *variation relative.*

Remarque 24.17. Signe du taux d'évolution

— Une *augmentation* correspond à un taux d'évolution positif : $T > 0$.

— Une *diminution* correspond à un taux d'évolution négatif : $T < 0$.

Propriété 24.18. *CM vs taux d'évolution*
Soient V_i et V_f les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Alors le taux d'évolution T et le CM k sont liés par les formules suivantes :

$$T = k - 1 \text{ ou encore } k = 1 + T.$$

Démonstration. ◊ On sait que $k = \frac{V_f}{V_i}$ donc :

$$T = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = k - 1.$$

D'où $T = k - 1$ et $k = 1 + T$. □

Exemple 24.19.
Une augmentation de 15% entre deux dates, correspond à un taux d'évolution $T = 15\% = \frac{15}{100} = 0,15$ et un CM : $k = 1 + T = 1 + 0,15$ soit $k = 1,15$.

24.3 Évolutions successifs et réciproques

24.3.1 Évolutions successifs

Définition 24.20.
Soit n un nombre entier naturel non nul. Soient V_0, V_1, …, V_n les valeurs d'une grandeur sur n périodes successives correspondant à des taux d'évolution T_1, T_2, …, T_n et des coefficients multiplicateurs k_1, k_2, …, k_n respectivement.

Alors, le *coefficient multiplicateur global* entre V_0 et V_n est égal au produit des coefficients multiplicateurs de cette période :

$$k = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n.$$

Le *taux d'évolution global* est :

$$T = (1 + T_1) \times (1 + T_2) \times \cdots \times (1 + T_n) - 1.$$

Démonstration. ◊ Par définition d'un coefficient multiplicateur, on sait que $V_1 = k_1 \times V_0$, $V_2 = k_2 \times V_1$ et ainsi de suite jusqu'à $V_n = k_n \times V_{n-1}$.

Donc, par multiplications successives, on obtient :

$$V_n = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n \times V_0.$$

En remplaçant chaque coefficient multiplicateur par son expression en fonction du taux d'évolution associé, on obtient le deuxième résultat. □

Exemple 24.21.
Un article subit une baisse de 10% puis une baisse de 20%. Le coefficient multiplicateur global est égal à $c = 0,9 \times 0,8 = 0,72$. Ainsi, le taux d'évolution vérifie l'équation suivante :

$$1 + t = 0,72 \Leftrightarrow t = 0,72 - 1 = -0,28$$

soit en pourcentage $p = -0,28 \times 100 = -28\%$. L'article a donc subi une baisse globale de 28%.

Exemple 24.22. *Important pour la suite !*
Un objet coûte 20 €. Il a subit une augmentation de 15% de son prix. Faut-il diminuer son prix de 15% pour retrouver le prix initial avant hausse ?

Pour cela, on calcule le prix de l'objet après l'augmentation de 15%. Le CM correspondant à une augmentation de 15% est de $1 + 0,15 = 1,15$. Ainsi,

$$20 \times 1,15 = 23\,€.$$

Maintenant, on va appliquer une baisse de 15% au prix après augmentation. Le CM correspondant à une baisse de 15% est de $1 - 0,15 = 0,85$. Ainsi,

$$23 \times 0,85 = 19,55\,€.$$

On constate qu'on ne revient pas au prix initial.

Remarque 24.23.
Attention ! L'opération « inverse » d'augmentation de 15% ne correspond pas à une diminution de 15%.

Augmenter de 15% puis diminuer de 15% revient à une diminution globale de $2,25\%$ (faire le calcul en exercice).

24.3.2 Évolutions réciproques

Définition 24.24.
Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. Les évolutions qui permettent de passer de V_0 à V_1 d'une part et de V_1 à V_0 d'autre part, s'appellent des *évolutions réciproques* l'une de l'autre.

Remarque 24.25.
Une évolution permet de nous ramener à la valeur de départ.

Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre.

Propriété 24.26.
Soient V_0 et V_1 les valeurs d'une grandeur à deux dates différentes. On note T (resp. T') le *taux d'évolution* et k (resp. k') le *coefficient multiplicateur* qui permettent de passer de V_0 à V_1 (resp. de V_1 et V_0). Alors :

$$k' = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad T' = \frac{1}{1+T} - 1.$$

Démonstration. ♢ D'une part le coefficient multiplicateur de V_0 à V_0 est égal à 1. Et d'autre part, il est égal au produit des coefficient multiplicateurs k et k'. Donc $kk' = 1$. On en déduit :

$$k' = \frac{1}{k} \text{ et par suite } 1 + T' = \frac{1}{1+T}.$$

D'où les deux résultats. □

24.4 Taux moyen

24.4.1 Moyenne géométrique

Définition 24.27. *Exposant* $1/n$
Soient a et α deux nombres strictement positifs et n un entier naturel non nul.

Le nombre $a^{1/n}$ est la solution positive de l'équation (d'inconnue α) suivante : $\alpha^n = a$.

Remarque 24.28.
On peut aussi noter l'exposant $1/n$ comme étant la racine n-ième du nombre $\sqrt[n]{\ }$.

Exemples 24.29.

— La racine carrée $\sqrt{2}$ est solution positive de l'équation $x^2 = 2$. On peut la noter $2^{1/2}$.

— Le nombre $4^{1/5}$ est solution positive de l'équation $x^5 = 4$. Il vaut environ $1,32$ (arrondi à 10^{-2} près).

Définition 24.30. *Moyenne géométrique*

La moyenne géométrique de n réels strictement positifs a_1, a_2, ..., a_n est le nombre $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$.

Exemples 24.31.

— La moyenne géométrique de 3 et 5 est $(3 \times 5)^{1/2} = \sqrt{15} \approx 3,87$.

— La moyenne géométrique de 2, 5 et 7 est $(2 \times 5 \times 7)^{1/3} \approx 4,12$.

24.4.2 Taux moyen

Définition 24.32.

Soit n un entier naturel. Soient V_0, V_1, ..., V_n les valeurs d'une grandeur sur n périodes successives corresponds à des taux d'évolutions T_1, T_2, ..., T_n. On note :

$$T_G = (1 + T_1) \times (1 + T_2) \times (1 + T_n)$$

le taux global associé aux n évolutions successives.

On définit le taux moyen correspondant à ces n évolutions successives, le nombre T_M tel que :

$$(1 + T_M)^n = 1 + T_G.$$

Remarque 24.33.

D'après la définition de l'exposant $1/n$, on obtient :

$$T_M = \sqrt[n]{1 + T_G} - 1.$$

Exemple 24.34.

On s'intéresse à une quantité A qui subit, par exemple, 4 évolutions successives de taux 5%, 10%, 7% et 12%. Cette quantité devient après les 4 évolutions la nouvelle quantité B :

$$B = (1 + 0,12) \times (1 + 0,07) \times (1 + 0,1) \times (1 + 0,05) \times A \approx 1,384 \times A,$$

ce qui correspond à une évolution globale de $38,4\%$.

Le taux d'évolution moyen des 4 évolutions successives est la « moyenne géométrique » des 4 taux. Ainsi :

$$(1 + T_G)^4 = 1 + 0,384 \Leftrightarrow 1 + T_G = \sqrt[4]{1,384} \Leftrightarrow 1 + T_G \approx 1,085 \Leftrightarrow T_G = 0,085,$$

soit un taux d'évolution moyen à $9,4\%$.

Exemple 24.35.

Pour une hausse annuelle de 15%, on cherche le taux *mensuel* moyen t_m. C'est le taux appliqué 12 fois de suite, et qui donne un taux global $t_g = -15\%$.

On résout donc l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(1 + t_m)^{12} = 1 - 0,15 \Leftrightarrow (1 + t_m)^{12} = 0,85 \Leftrightarrow 1 + t_m = 0,85^{1/12} \\ \Leftrightarrow t_m = \sqrt[12]{0,85} - 1 \approx -0,0135\end{aligned}$$

soit en pourcentage, une baisse mensuelle moyenne de $1,35\%$.

24.5 Indices

24.5.1 Définition et propriétés

Définition 24.36.
On appelle *indice* d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 le nombre :

$$I = 100 \times \frac{y_2}{y_1}$$

Si t est le taux d'évolution de y_2 par rapport à y_1 alors $100(1+t) = I$.

Exemple 24.37.
Un indice de 112 correspond à une augmentation de 12%.

Propriété 24.38.
- Un indice est toujours strictement positif.
- Un indice plus grand que 100 correspond à une hausse.
- Un indice plus petit que 100 correspond à une baisse.

Remarque 24.39.
L'intérêt des indices est de tout ramener à 100 afin de mieux « voir » et comparer les évolutions.

24.5.2 Un exercice d'application pour l'utilisation des indices

Voici la consommation de pétrole de trois pays en millions de tonnes entre 1992 et 2011.

Année	1992	1998	2002	2008	2011
États-Unis	792	854	891	889	834
Chine	123	190	246	380	462
France	94	92	94	91	83

On va calculer les indices (par pays), base 100 en 1992, arrondis à 0,1 près pour comparer l'évolution de la consommation dans ces trois pays.

On calcule, par exemple, l'indice en 1998 par rapport à 1992. On a :

$$I_{98/92} = \frac{854}{792} \times 100 = 107,8.$$

Cela signifie que la consommation de pétrole des États-Unis a augmenté de $7,8\%$ entre 1992 et 1998.

En calculant tous les indices des années présentes par rapport à 1992 de chaque pays, on obtient le tableau suivant :

Année	1992	1998	2002	2008	2011
États-Unis	100	107,8	112,5	112,5	105,3
Chine	100	154,5	200	308,9	375,6
France	100	97,9	100	96,8	88,3

On peut interpréter les résultats du tableau précédent :
- La consommation des États-Unis a continué à augmenter dans le début des années 1990 puis s'est stabilisé et tend à diminuer légèrement en 2011.
- La consommation en France a peu évolué ces dernières années, avec une baisse plus nette en 2011.
- La consommation de la Chine explose et est en continuelle hausse ($+275,6\%$ en 20 ans !!)

24.5.3 Le point de pourcentage

Un *point de pourcentage* est une unité utilisée pour désigner la différence arithmétique entre deux pourcentages appliquées à la même grandeur.

Exemple 24.40.
Une taxe qui passe de $5,5\%$ à 11% va doubler. Donc elle subit une augmentation de 100% en pourcentage. Par contre, on dira qu'elle a subit une augmentation de $5,5$ points de pourcentage, et non une augmentation de $5,5\%$.

Remarque 24.41.
L'augmentation de pourcentage de $5,5\%$ appliquée au pourcentage $5,5\%$ est :

$$V_f = 5,5 \times \left(1 + \frac{5,5}{100}\right) = 5,8025.$$

24.6 Applications

24.6.1 Application de la TVA

► **Exercice 24.42.**
Le prix HT (Hors Taxe) d'un objet est de 500 €. Le taux de TVA (Taxe à la valeur ajoutée) appliquée sur produit est de $19,6\%$. Quel est le prix TTC (toutes taxes comprises) de ce produit ?

Solution. ◊ On applique un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{19,6}{100} = 1,196$ au prix initial de l'objet :

$$500 \times 1,196 = 598.$$

Le prix TTC de l'objet est de 598 €. □

24.6.2 Croissance du PIB

► **Exercice 24.43.**
Un chef d'état souhaiterait que la croissance du PIB de son pays atteigne 2% sur l'année.

Les études comptables montrent que le PIB a augmenté de $0,5\%$ au premier trimestre, diminué de $0,2\%$ au deuxième trimestre puis augmenté de $1,1\%$ au troisième trimestre.

Quelle doit être l'évolution minimale au cours du dernier trimestre de l'année pour que le chef d'état atteigne ses objectifs ? Arrondir le résultat à $0,1\%$ près.

Solution. Soit t le taux d'évolution du PIB au cours du dernier trimestre par rapport au troisième trimestre. Il faut résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}
&(1+0,005)\,(1-0,002)\,(1+0,011)\left(1+\frac{t}{100}\right) > 1+0,02 \\
&\qquad \Leftrightarrow 1,005 \times 0,998 \times 1,0011 \times \left(1+\frac{t}{100}\right) > 1,02 \\
&\qquad \Leftrightarrow 1,004093\left(1+\frac{t}{100}\right) > 1,02 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} > 1,015842 \Leftrightarrow \frac{t}{100} > 0,015842
\end{aligned}$$

soit $t = 1,58\%$. Il faut au minium que l'évolution du PIB du dernier trimestre par rapport au troisième soit d'environ $1,6\%$. □

24.6.3 Indices de références des loyers

L'IRL a été fixé à 100 au 2ème trimestre 2004 et est réévalué chaque trimestre par l'INSEE. Il permet de réviser au loyer d'habitation.

Période	Année	Valeur	Date de parution
2ème Trimestre	2004	$100,0$	15/10/04
3ème Trimestre	2004	$100,75$	14/01/05
4ème Trimestre	2004	$101,45$	12/04/05
1er Trimestre	2005	$102,1$	08/07/05
2ème Trimestre	2005	$102,6$	14/10/05
3ème Trimestre	2005	$103,07$	10/01/06
4ème Trimestre	2005	$103,78$	07/04/06
1er Trimestre	2006	$104,61$	11/07/06

Soit un bail de location signé le 1er janvier 2005 pour un loyer mensuel de 480 €, révisable annuellement à la date anniversaire du contrat. Le dernier indice connu à cette date est celui du deuxième trimestre de 2004 publié le 15 octobre 2004. Sa valeur est 100.

Le 1er janvier 2006 intervient la première révision du loyer, le dernier indice connu est celui du 2ème trimestre 2005, il est de $102,6$.

Le nouveau montant du loyer sera donc de $480 \times \dfrac{102,6}{100} = 492,48$ €.

24.6.4 Étude d'une population de loup (suites arithmético-géométrique)

▶ **Exercice 24.44.** *BAC ES Asie 2018, Exercice 3*
Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population de loups croit naturellement au rythme de 12% par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n) le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017+n$.

1. (a) Avec ce modèle, vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 est de 318.
   (b) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N<-0
U<-300
Tant que ........... faire
U <- .........
N <- .........
Fin Tant que
```

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$. Préciser son terme initial.
   (b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.
   (c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier. Que peut-on en déduire ?
4. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
   $$150 + 1,12^n \times 150 > 600.$$
   (b) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.

5. En 2023, avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.

   En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ? *Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.*

Solution. $\diamondsuit$

1. (a) Le nombre de loups en 2017 était de 300. Elle augmente de 12% chaque année, donc en 2018, la population de loups sera de :

$$300 + 300 \times \frac{12}{100} - 18 = 300 + 36 - 18 = 336 - 18 = 318.$$

   (b) Le coefficient multiplicateur qui traduit une augmentation de 12% est de $1 + \frac{12}{100} = 1,12$. Ainsi, pour passer de la population u_n d'une année passée à celle de l'année suivante u_{n+1}, il faut multiplier par le facteur $1,12$. De plus, les chasseurs tuent 18 loups par an donc :

$$u_{n+1} = 1,12 \times u_n - 18.$$

2. L'algorithme suivant permet de déterminer au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N<-0
U<-300
Tant que U < 600 faire
U <- 1.12*U-18
N <- N+1
Fin Tant que
```

   L'algorithme nous donne comme résultat $N = 10$. Conclusion : au bout de 10 ans, la population de loups aura doublé.

3. (a) On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 150 \Leftrightarrow v_{n+1} = (1,12u_n - 18) - 150 \Leftrightarrow v_{n+1} = 1,12u_n - 168$$
$$v_{n+1} = 1,12\left(u_n - \frac{168}{1,12}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = 1,12(u_n - 150) = 1,12v_n.$$

   Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$. De plus, $v_0 = u_0 - 150 = 300 - 150 = 150$.

   (b) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$ et de premier terme $v_0 = 150$, on a :

$$v_n = 150 \times 1,12^n.$$

   On peut ainsi déduire l'expression de u_n en fonction de n :

$$v_n = u_n - 150 \Leftrightarrow u_n = v_n + 150 \Leftrightarrow u_n = 150 \times 1,12^n + 150.$$

   (c) D'après le cours, on a $\lim_{n\to+\infty} 1,12^n = +\infty$ car $1,12 > 1$. Donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. La population de loup ne cessera de croître sur le long terme.

4. (a) On souhaite résoudre l'inéquation suivante :

$$150 \times 1,12^n + 150 > 600 \Leftrightarrow 150 \times 1,12\text{"}n > 450 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{450}{150} \Leftrightarrow 1,12^n > 3$$
$$\Leftrightarrow \ln(1,12^n) > \ln(3) \Leftrightarrow n\ln(1,12) > \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(3)}{\ln(1,12)} \Leftrightarrow n > 9,69.$$

(b) Ainsi, au bout de la dixième année (en 2027), la population de loups aura doublé.

5. Soit la suite (w_n) qui modélise la population des loups à partir de 2023 avec un quota de 35 loups tués par an. On a ainsi :

$$\begin{cases} w_0 = 446 \\ w_{n+1} = 1,12 w_n - 35. \end{cases}$$

Avec la calculatrice, on peut conjecturer qu'au bout de la septième année (en 2030) la population de loups aura dépassé 600 loups.

Pour démontrer que la conjecture est vraie, il faut avoir l'expression en fonction de n d'une suite auxiliaire (z_n) qui s'exprime en fonction de (w_n) et qui serait géométrique de raison $1,12$. La suite auxiliaire (z_n) est de la forme :

$$z_n = w_n + q.$$

Comme la suite (z_n) est géométrique de raison $1,12$, on a :

$$z_{n+1} = w_{n+1} + q = 1,12 w_n - 35 + q$$

Ainsi :

$$z_{n+1} = 1,12 z_n \Leftrightarrow 1,12 w_n - 35 + q = 1,12(w_n + q) \Leftrightarrow -35 = 0,12q \Leftrightarrow q = \frac{-35}{0,12}$$

Ainsi : $z_n = w_n - \frac{35}{0,12}$. On a alors : $z_0 = 446 - \frac{35}{0,12} = \frac{463}{3}$ et on peut exprimer (z_n) en fonction de n :

$$z_n = \frac{463}{3} \times (1,12)^n.$$

On a alors :

$$z_n = w_n - \frac{875}{3} \Leftrightarrow w_n = z_n + \frac{875}{3} \Leftrightarrow w_n = \frac{463}{3} \times (1,12)^n + \frac{875}{3}.$$

Pour trouver le nombre minimal d'années pour que la population de loups soit supérieur à 600, il nous faut résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{463}{3} \times (1,12)^n + \frac{875}{3} > 600 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow n \geqslant 7.$$

(la résolution de l'inéquation est laissée en exercice).

On retrouve le résultat de la conjecture. Selon ce nouveau modèle, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux en 2030.

□

24.6.5 Probabilités conditionnelles

▶ **Exercice 24.45.**
Dans une population Ω, deux maladies M_1 et M_2 sont présentes respectivement chez 10% et 20% des individus. On suppose que le nombre de ceux qui souffrent des deux maladies est négligeable. On entreprend un dépistage systématique des maladies M_1 et M_2. Pour cela, on applique un test qui réagit sur 90% des malades de M_1, sur 70% des malades M_2 et sur 10% des individus qui n'ont aucune de ces deux affections.

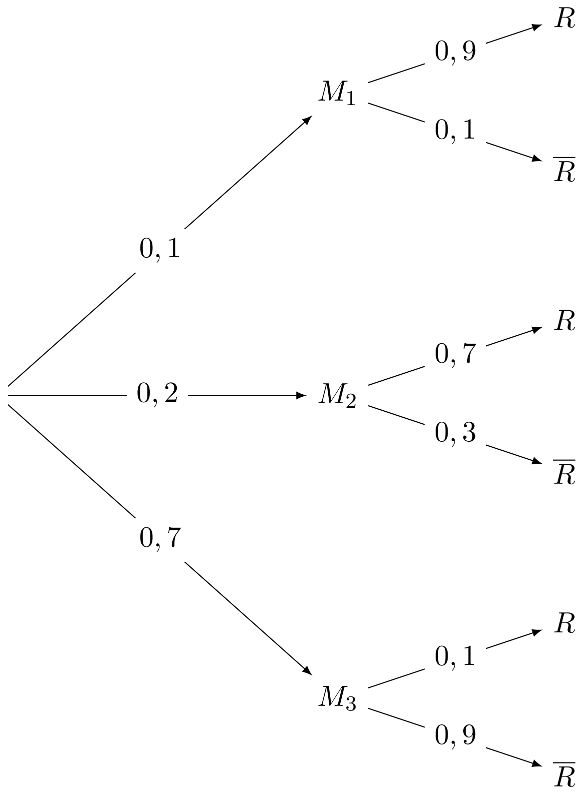
1. Quand on choisit au hasard un individu ω dans Ω, quelle est la probabilité pour que le test réagisse ?
2. Sachant que pour un individu ω, le test a réagi, donner les probabilités :
   — pour que le test ait réagit à cause de la maladie M_1.
   — pour que le test ait réagit à cause de la maladie M_2.

— pour que le test ait réagit alors que l'individu n'est infecté par aucune des deux maladies.

Solution. ◊ On note les événements suivants :

— M_1 : « l'individu choisi est atteint de la maladie M_1 »
— M_2 : « l'individu choisi est atteint de la maladie M_2 »
— N : « l'individu choisi n'est atteint par aucune maladie »
— R : « le test réagit »

On peut faire un arbre de probabilité pour résumer les données de l'énoncé :



1. Les événements M_1, M_2 et N forment un système complet dans l'univers Ω, on peut donc utiliser la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(R) &= P(M_1 \cap R) + P(M_2 \cap R) + P(N \cap R)\\ &= P(M_1)P_{M_1}(R) + P(M_2)P_{M_2}(R) + P(N)P_N(R)\\ &= 0,1 \times 0,9 + 0,2 \times 0,7 + 0,7 \times 0,1 = 0,09 + 0,14 + 0,07 = 0,3.\end{aligned}$$

   Il y a 30% de chance que l'individu choisi ait un test qui réagit.

2. (a) On calcule :

$$P_R(M_1) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,09}{0,3} = 0,3.$$

   La probabilité que le test réagit à cause de la maladie M_1 est de $0,3$.

   (b) On calcule :

$$P_R(M_2) = \frac{P(M_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,14}{0,3} \approx 0,47.$$

   La probabilité que le test réagit à cause de la maladie M_2 est d'environ $0,47$.

   (c) On calcule :

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,07}{0,3} \approx 0,23.$$

   La probabilité que le test réagit alors que l'individu ne soit pas infecté par aucune des deux maladies est d'environ $0,23$.

□

24.7 Compléments

24.7.1 Approximation des petits taux

Deux évolutions successives de même taux

Propriété 24.46.
Lorsque t est petit, le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux t est environ égal à 2%.

Exemple 24.47.
On considère deux évolutions successives de taux 1%. La valeur initiale V_i devient :

$$V_f = (1+0,01)^2 \times V_i = 1,0201 \times V_i$$

que l'on peut arrondir à $1,02 \times V_i$.

Ceux deux évolutions correspondent donc à une évolution globale de taux environ $2 \times 1\%$.

Évolution réciproque

Propriété 24.48.
Lorsque t est petit, le taux d'évolution réciproque d'une évolution de taux t est environ égal à $-t$.

Exemple 24.49.
On considère une évolution entre V_i et V_f de taux 2%. On a : $V_f = (1+0,02)V_i$ et donc :

$$V_i = \frac{1}{1+0,02} V_f \approx 0,98 \times V_f = (1-0,02) \times V_f.$$

Le taux d'évolution réciproque de V_i par rapport à V_f est donc environ -2%.

24.7.2 Addition de deux pourcentages

Pour introduire le paragraphe « Évolutions successives », on peut faire la remarque suivante :

Remarque 24.50.
Les pourcentages d'augmentations et de diminutions ne s'ajoutent pas.

Reprenons l'exemple 24.21.

Exemple 24.51.
Un article subit une baisse de 10% puis une baisse de 20%. Cela ne correspond pas à une baisse de 30%. Supposons que l'article coûte $p_0 = 10$ € avant les réductions successives. Si on lui applique une baisse de 10%, on a un nouveau prix $p_1 = 0,9 \times p_0 = 0,9 \times 10 = 9$ €. Ensuite, on lui applique une baisse de 20%, le nouveau prix $p_2 = 0,8 \times p_1 = 0,8 \times 9 = 7,2$ €.

Si les deux baisses successives de 10% puis de 20% correspondait à une baisse globale de 30% du prix, on aurait :

$$p_2 = 0,7 \times p_0 = 0,7 \times 10 = 7 \neq 7,2.$$

Ainsi, les pourcentages d'augmentations et de diminutions ne s'ajoutent pas.

24.7.3 Diagramme circulaire

Le diagramme circulaire lie la notion de cercle et de pourcentages.

Définition 24.52.
Un diagramme circulaire sert à représenter graphiquement des répartitions, des parts.

Propriété 24.53.
Dans un diagramme circulaire, l'angle de chaque secteur est proportionnel à l'effectif qu'il représente.

Par exemple, à 100% correspond à un angle de 360°, 50% correspond à 180%.

Exemple 24.54.
Dans un club réunissant 120 licenciés, la répartition est la suivante :

— basket : 15 licenciés ;

— football : 35 licenciés ;

— handball : 20 licenciés ;

— rugby : 30 licenciés ;

— volley-ball : 20 licenciés.

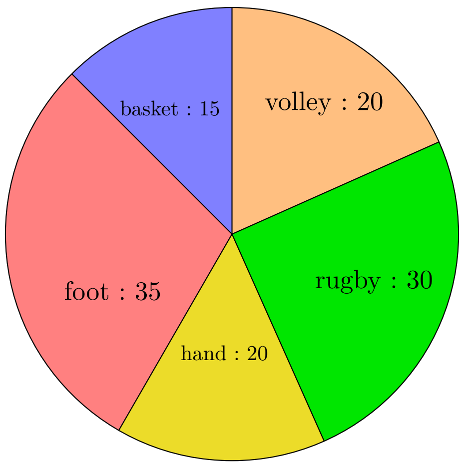
On veut représenter cette répartition à l'aide d'un diagramme circulaire. Pour cela, on construit un tableau de proportionnalité avec le nombre de licenciés par sport et l'angle du secteur qu'il représentera dans le diagramme circulaire.

Sport	basket	foot	hand	rugby	volley	Total
Nombre de licenciés	15	35	20	30	20	120
Angle	45°	105°	60°	90°	60°	360°

La troisième ligne peut se remplir progressivement si on calcule le coefficient de proportionnalité (passage de la deuxième ligne à la troisième ligne) :

$$\frac{360}{120} = 3.$$

On peut ainsi tracer le diagramme circulaire à l'aide du compas, de la règle et du rapporteur.



Répartition par sport du nombre de licenciés

LEÇON

25

Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations.

Préambule

Niveau : classes de troisième et de lycée

Prérequis : résolution des équations, arithmétique, étude de fonctions

Références :

[1] Collectif de professeurs SESAMATHS, *Sesamaths, 3ème.* Magnard, 2008.

[2] C. BOULONNE, *LET'S MATHS no 60 - Enigmes SdM de la « Voix du Nord »*. [url].

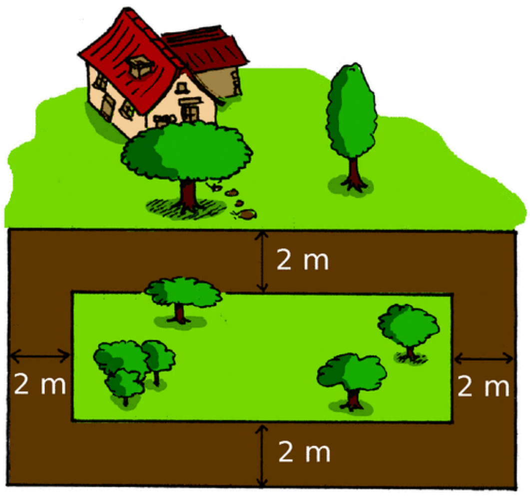
[3] G. JULIA, *Épreuve sur dossier au CAPES de Mathématiques.* [url].

[4] C. BOULONNE, *3 énigmes de la Voix du Nord / SdM2017 nº 9.* [url].

[5] *Programmation linéaire.* [url].

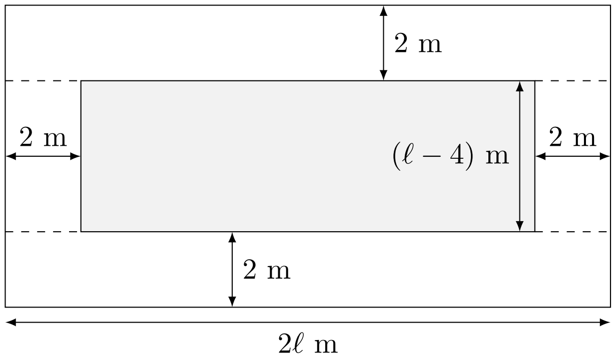
25.1 Résolution d'équations du premier degré

Problème 25.1.
Madame Anabelle Pelouse possède un terrain rectangulaire dont la longueur est le double de sa largeur. Ce terrain est constitué d'un très beau gazon entouré d'une allée.



1. Sachant que l'aire de l'allée est 368 m^2, calculer la mesure exacte de la largeur du terrain.
2. En déduire les aires, en m^2, les aires du terrain et de la partie recouverte de gazon.

◊ *Solutions.* 1. Soit ℓ la largeur du terrain, on a donc : $L = 2\ell$. Si on prolonge les longueurs du rectangle de pelouse vers le bord extérieur du terrain, on obtient un découpage de l'allée en quatre rectangles.



On peut ainsi calculer l'aire de l'allée de cette manière :

$$\mathscr{A}_A = 2 \times 2 \times 2\ell + 2 \times 2 \times (\ell - 4) = 4 \times (2\ell + \ell - 4)$$

On résout donc l'équation suivante :

$$4(3\ell - 4) = 368 \Leftrightarrow 3\ell - 4 = 92 \Leftrightarrow 3\ell = 96 \Leftrightarrow \ell = \frac{96}{3} = 32.$$

La mesure exacte de la largeur du terrain est de 32 m. La longueur du terrain est donc de 64 m.

2. On peut alors calculer l'aire du terrain :

$$\mathscr{A}_T = 32 \times 64 = 2048 \text{ m}^2.$$

Ainsi, l'aire de la surface gazonnée est :

$$\mathscr{A}_G = \mathscr{A}_T - \mathscr{A}_A = 2048 - 368 = 1680 \text{ m}^2.$$

□

Problème 25.2.
Un archer s'entraîne tous les jours pendant une semaine. À chaque nouvel entrainement, il tire 10 flèches de plus que la veille. Combien de flèches tire-t-il le premier jour, sachant qu'à la fin de la semaine, il aura tiré 1400 flèches au total ?

◊ *Solutions.* Soit n le nombre de flèches tirés au premier jour d'entrainement. L'archer aura donc tiré :

— $n + 10$ flèches le deuxième jour ;
— $n + 20$ flèches le troisième jour ;
— $n + 30$ flèches le quatrième jour ;
— ...
— $n + 60$ flèches le septième jour.

L'archer aura donc tiré un total de :

$$n + (n + 10) + (n + 20) + \cdots + (n + 60) = 7n + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 = 7n + 210.$$

Il faut donc résoudre l'équation d'inconnue n : $7n + 210 = 1400$

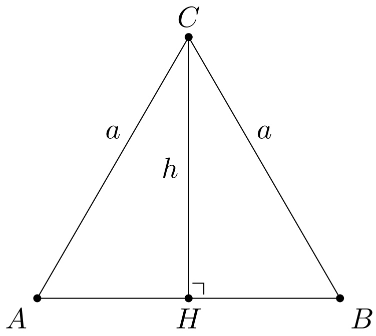
$$7n + 210 = 1400 \Leftrightarrow 7n = 1400 - 210 \Leftrightarrow 7n = 1190 \Leftrightarrow n = \frac{1190}{7} = 170.$$

L'archer aura donc tiré 170 flèches le premier jour. □

25.2 Résolution d'équations du second degré

Problème 25.3. *CRPE 2015*
Soit un triangle équilatéral de côté a. Quelle est la mesure h de la hauteur du triangle équilatéral ?

♢ *Solutions.* Faisons un petit schéma de la situation :



On note H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du point C. On a alors $CH = h$.

Comme ABC est un triangle équilatéral, la hauteur du triangle issue du point C est aussi la médiatrice du segment $[AB]$. Ainsi H est le milieu du segment $[AB]$. Soit $AB = a$, on a alors $AH = \frac{a}{2}$. Le triangle AHB est un triangle rectangle en H donc on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la mesure de h.

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

On a alors :

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow h = \pm\frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Or h est une longueur donc positive et ainsi : $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. □

Problème 25.4. *Dossier CAPES 2014*

1. Est-il possible de construire un rectangle de périmètre 17 cm et d'aire 17 cm^2 ? Si oui, on précisera les dimensions de ce rectangle.
2. Plus généralement, soit k un nombre réel strictement positif. Pour quelles valeurs de k est-il possible de construire un rectangle de périmètre k (en cm) et d'aire k (en cm^2) ?

♢ *Solutions.* 1. Soit L et ℓ les dimensions d'un tel rectangle. On doit alors résoudre le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 2(\ell + L) = 17 \\ L\ell = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell + L = \frac{17}{2} & (1) \\ L\ell = 17 & (2) \end{cases}.$$

Dans l'équation (1), on peut exprimer L en fonction de ℓ : $L = \frac{17}{2} - \ell$, on a donc dans l'équation (2) :

$$\left(\frac{17}{2} - \ell\right)\ell = 17 \Leftrightarrow -\ell^2 + \frac{17}{2}\ell - 17 = 0 \Leftrightarrow \ell^2 - \frac{17}{2}\ell + 17 = 0.$$

On résout cette équation du second degré avec la méthode du discriminant :

$$\Delta = \left(-\frac{17}{2}\right)^2 - 4 \times 17 = \frac{289}{4} - \frac{16 \times 17}{4} = \frac{289 - 272}{4} = \frac{17}{4}$$

Δ étant positif, l'équation admet deux solutions réelles et $\sqrt{\Delta} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Ainsi :

$$\ell_1 = \frac{\frac{17}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}{2} = \frac{17 - \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \frac{17 + \sqrt{17}}{4}$$

Comme $L = \dfrac{17}{2} - \ell$, on obtient :

$$L_1 = \frac{17}{2} - \frac{17 - \sqrt{17}}{4} = \frac{2 \times 17 - 17 + \sqrt{17}}{4} = \frac{17 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{17 - \sqrt{17}}{4}.$$

D'où le rectangle qui convient à pour dimension $\ell = \dfrac{17 - \sqrt{17}}{4}$ et $L = \dfrac{17 + \sqrt{17}}{4}$.

Soit $k > 0$ et L_k et ℓ_k les dimensions d'un rectangle de périmètre k cm et d'aire k cm^2. La recherche de dimension revient à résoudre l'équation du second degré suivante :

$$\ell_k^2 - \frac{k}{2}\ell_k + k = 0.$$

On résout cette équation du second degré avec la méthode du discriminant :

$$\Delta_k = \frac{k^2}{4} - 4 \times k = \frac{k^2 - 16k}{4} = \frac{k(k-16)}{4}.$$

Or $\Delta_k \geqslant 0$ si et seulement $k(k-16) \geqslant 0$, c'est-à-dire quand $k \geqslant 16$.

Ainsi, pour $k \geqslant 16$, il est possible de construire un rectangle de périmètre k (en cm) et d'aire k (en cm^2). Les dimensions d'un tel rectangle sera :

$$\ell = \frac{k - \sqrt{k}}{4} \quad \text{et} \quad L = \frac{k + \sqrt{k}}{4}.$$

□

Problème 25.5. *Dossier CAPES 2014*
Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm, on place une bille de rayon 4 cm. On verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille (la surface de l'eau est alors tangente à la bille qui se trouve au fond du récipient). On retire ensuite la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon R différent de 4 cm.

Est-il possible que l'eau recouvre exactement la nouvelle bille ?

◇ *Solutions.* On calcule le volume d'eau nécessaire pour recouvrir la bille de 4 cm :

$$V_E = V_B - V_C = \frac{4}{3}\pi \times 4^3 - 8 \times 10^2 \times \pi = \pi \times \left(\frac{4}{3}\pi \times 4^3 - 8 \times 10^2\right).$$

Si on veut plonger une nouvelle bille de rayon R différent de 4 (de volume V_R), il faut que R vérifie l'équation suivante :

$$V_E + V_R = V_{CR} \Leftrightarrow \pi \times \left(\frac{4}{3}\pi \times 4^3 - 8 \times 10^2\right) + \frac{4}{3}\pi R^3 = 2^R \times 10 \times \pi.$$

On peut factoriser par π et on multiplie par 3 dans les deux membres de l'égalité, on obtient :

$$24 \times 10^2 - 4 \times 4^3 + 4R^3 = 6R \times 10^2 \Leftrightarrow 2144 + 4R^3 - 6R \times 10^2 = 0$$

On peut ensuite diviser par 4 et on obtient :

$$2144 + 4R^3 - 6R \times 10^2 = 0 \Leftrightarrow R^3 - 150R + 536 = 0 \quad (E)$$

Une solution évidente de (E) est $R = 4$ car on se ramène au cas précédent. On a alors :

$$\begin{aligned} R^3 - 150R + 536 &= (R-4)(aR^2 + bR + c) \\ &= aR^2(R-4) + bR(R-4) + c(R-4) \\ &= aR^3 - 4aR^2 + bR^2 - 4bR + cR - 4c \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = -150 \\ -4c = 536 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -134 \end{cases}.$$

D'où :

$$R^3 - 150R + 536 = (R-4)(R^2 + 4R - 134).$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $R^2 + 4R - 134 = 0$ par la méthode du discriminant.

$$\Delta = 4^2 + 4 \times 134 = 16 + 536 + 16 = 552.$$

Δ étant positif, l'équation admet deux solutions réelles et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{552} = 2\sqrt{138}$.

$$R_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{138}}{2} = -2 + \sqrt{138} \approx 9,75 \quad \text{et} \quad R_2 = -2 - \sqrt{138} < 0.$$

Conclusion : on peut plonger une nouvelle bille de rayon $R \approx 9{,}75$ cm. □

25.3 Théorème des valeurs intermédiaires, approximations

Problème 25.6. *Dossier CAPES 2014*

On considère la fonction g définie sur $[-6; +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 276$. On donne son tableau de variations ci-dessous :

x	-6		-2		5		$+\infty$
g	-120	$\nearrow$	344	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-6; +\infty]$.
2. Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) avec une amplitude de $0,01$.

◊ *Solutions.* 1. On travaille sur les différents intervalles où g est strictement monotone.

— g est continue et strictement croissante sur $[-6; -2]$, $g(-6) = -120 < 0$ et $g(-2) = 344 > 0$ donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-6; -2]$.

— g est continue et strictement décroissante sur $[-2; 5]$, $g(-2) = 344 > 0$ et $g(5) = 1 > 0$ donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-2; 5]$.

— g est continue et strictement croissante sur $[5; +\infty[$, $g(5) = 1 > 0$ et

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty > 0$$

donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), $g(x) = 0$ admet n'admet pas de solution sur $[5; +\infty]$.

Conclusion : g admet une unique solution α sur l'intervalle $[-6;+\infty]$.

2. Par approximation successives, on trouve :

$$-6 \leqslant \alpha \leqslant -5 \text{ (pas 1)}$$

$$-5,6 \leqslant \alpha \leqslant -5,5 \text{ (pas } 0,1\text{)}$$

$$-5,51 \leqslant \alpha \leqslant -5,5 \text{ (pas } 0,01\text{)}$$

□

Problème 25.7.
Une entreprise fabrique des objets. Le bénéfice $B(x)$ (en milliers d'euros) tiré de la fabrication et de la vente de x milliers d'unités (x variant de 0 à 3) est défini par la fonction suivante :

$$B(x) = x^3 - 2x^2 - 2.$$

Déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour que le bénéfice de l'entreprise soit nul.

◊ *Solutions.* On étudie la fonction B sur l'intervalle $[0;3]$.

$$B'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

L'équation $B'(x) = 0$ admet deux solutions $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$. Ainsi,

x	0		$\frac{4}{3}$		3
$B'(x)$	0	-	0	+	
B	-2	$\searrow$	$-\frac{86}{27} \approx -3{,}185$	$\nearrow$	7

On peut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires :

— Sur l'intervalle $\left[0;\frac{4}{3}\right]$, B est continue et strictement décroissante, $B(0) = -2 < 0$ et $B\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{86}{27} < 0$ donc $B(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

— Sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3};3\right]$, B est continue et strictement croissante, $B\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{86}{27} < 0$ et $B(3) = 7 > 0$ donc $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[4/3;3]$.

Conclusion : $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;3]$. On donne un encadrement de la valeur de α avec une amplitude de $0,01$.

$$2 \leqslant \alpha \leqslant 3 \text{ (pas 1)}$$

$$2,3 \leqslant \alpha \leqslant 2,4 \text{ (pas } 0,1\text{)}$$

$$2,35 \leqslant \alpha \leqslant 2,36 \text{ (pas } 0,01\text{)}$$

Conclusion : il faut fabriquer entre 2350 et 2360 objets pour que le bénéfice de l'entreprise soit nul. □

25.4 Résolution d'un système linéaire

Voir la résolution d'un système linéaire dans la leçon **L2020-23 : Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations. Exemples de résolution**

Problème 25.8. *Brevet Nouvelle Calédonie 2017*
Alexandra achète 2 cahiers et 3 crayons, elle paie 810 F. Nathalie achète 1 cahier et 5 crayons, elle paie 650 F.
Combien coûte un cahier et combien coûte un crayon ?

♢ *Solutions.* Ce problème a été donné au Brevet Nouvelle-Calédonie 2017 sous un format QCM. Les élèves qui passaient l'épreuve pouvait vérifier les réponses données. Nous allons à notre niveau résoudre le système d'équation sous-jacent au problème.

Soit x le prix d'un cahier et y le prix d'un crayon. On est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 810 & (1) \\ x + 5y = 650 & (2) \end{cases}.$$

Dans l'équation (2), on peut remarquer que : $x = 650 - 5y$ d'où, on peut remplacer la valeur de x dans l'équation (1) :

$$2(650 - 5y) + 3y = 810 \Leftrightarrow 1300 - 10y + 3y = 810 \Leftrightarrow -7y = -490 \Leftrightarrow y = \frac{-490}{-7} = 70.$$

On peut maintenant remplacer la valeur de y dans l'équation (2), on trouve :

$$x = 650 - 5 \times 70 = 650 - 350 = 300.$$

On peut vérifier que les solutions trouvées vérifient bien les équations du système :

$$2 \times 300 + 3 \times 70 = 600 + 210 = 810;$$
$$300 + 5 \times 70 = 300 + 350 = 650.$$

Conclusion : un cahier coûte 300 € et un crayon coûte 70 €. □

Problème 25.9.
Un concours pour participer au prochain voyage sur Mars comporte 30 questions. Chaque bonne réponse rapporte 7 points mais chaque mauvaise en retire 12. Une question sans réponse ne modifie pas le score. Le score d'une martienne est 77 et elle est sûre de s'être trompée au moins une fois.
À combien de questions cette martienne a-t-elle fourni une réponse fausse ?

♢ *Solution.* Soit b le nombre de bonnes réponses, f le nombre de réponses fausses et n le nombre de questions non répondues. b, f et n sont solutions du système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 7b - 12f = 77 \\ b + f + n = 30 & (*) \\ f > 0 \end{cases}$$

Comme 77 est un multiple de 7, il faut que le nombre de réponses que $12 \times f$ soit un multiple de 7. Comme 12 est premier avec 7, d'après le lemme de Gauss, f est un multiple de 7 strictement supérieur à 0. On peut tester des valeurs de f :

— si $f = 7$, $7b = 77 + 12 \times 7 = 7 \times (12 + 11) \Leftrightarrow b = 23$ et on aurait $b + f + n = 30 \Leftrightarrow 30 + n = 30 \Leftrightarrow n = 0$.

— si $f = 14$, $7b = 77 + 12 \times 14 = 7 \times (24 + 11) \Leftrightarrow b = 35$. Or, $b + f + n \geqslant 30$ donc on ne peut pas retenir cette solution.

L'unique solution du système d'équations $(*)$ est $(b, f, n) = (23; 7; 0)$. □

25.5 Équations diophantiennes et théorème des restes chinois

▶ **Exercice 25.10.** *CAPES 2013*
On souhaite planter des orangers dans un jardin qui dispose de deu fontaines. Pour simplifier l'irrigation, les orangers à planter doivent être alignés avec les deux fondaintes. Pour modéliser la situation, on se place dans un repère orthonormé dans lequel les points $A(10; 10)$ et $B(87; 31)$ désignent les deux fontaines.

1. Un premier jardinier propose de planter un oranger au point $G(30; 16)$. Cette proposition convient-elle ? Justifier votre réponse.
2. Un second jardinier propose de planter autant d'orangers que possible en respectant les deux conditions suivantes :
   — chaque oranger est planté sur le segment situé entre les deux fontaines,
   — chaque oranger est planté sur un point dont les deux coordonnées sont entières.

   Déterminer le nombre maximal d'orangers qu'il est possible de planter en respectant ces deux conditions et préciser leurs coordonnées dans le repère.

Solution. ♢

1. On peut déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{31 - 10}{87 - 10} = \frac{21}{77} = \frac{3}{11}$$
puis :
$$10 = \frac{3}{11} \times 10 + b \Leftrightarrow b = 10 - \frac{30}{11} = \frac{110 - 30}{11} = \frac{80}{11}.$$
La droite (AB) a pour équation cartésienne : $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$. On vérifie que $G(30; 16)$ appartient ou non à la droite (AB) :
$$\frac{3}{11} \times 30 + \frac{80}{11} = \frac{90 + 80}{11} = \frac{170}{11} \approx 15,45.$$
Donc : le premier jardinier ne pourra pas planter l'oranger au point $G(30; 16)$.
2. On se propose de déterminer tous les points $(x; y)$ tels que x entier et $y = \frac{3}{11}x + \frac{80}{11}$ soit entier ou encore :
$$11y = 3x + 80 \Leftrightarrow 11y - 3x = 80.$$
On a : $\&textPGCD(3, 11) = 1$ donc l'équation diophantienne a une infinité de solutions. On donne la solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$ est :
$$1 = 22 - 21 = 11 \times 2 - 3 \times 7$$
On a alors comme solution particulière de l'équation $11y - 3x = 80$: $x = 7 \times 80 = 560$ et $y = 2 \times 80 = 160$. Ainsi les solutions générales de l'équation diophantienne est :
$$(x, y) = (560 + 11k, 160 + 3k)$$
On cherche les solutions (x, y) tels que $10 < x < 87$ et $10 < y < 31$.
$$\begin{gathered} 560 + 11k > 10 \Leftrightarrow 11k > 10 - 560 \Leftrightarrow 11k > -550 \Leftrightarrow k > -50 \\ 560 + 11k < 87 \Leftrightarrow 11k < 87 - 560 \Leftrightarrow 11k < -473 \Leftrightarrow k < -43 \\ 160 + 3k > 10 \Leftrightarrow 3k > 10 - 160 \Leftrightarrow 3k > -150 \Leftrightarrow k > -50 \\ 160 + 3k < 31 \Leftrightarrow 3k < 31 - 160 \Leftrightarrow 3k < -129 \Leftrightarrow k < -43 \end{gathered}$$
D'où : $-50 < k < -43$ et on obtient les six coordonnées de plantation d'orangers :

k	x	y
-49	21	13
-48	32	16
-47	43	19
-46	54	22
-45	65	25
-44	76	28

On pourra planter des orangers en $(21;13)$, $(32;16)$, $(43;19)$, $(54;22)$, $(65;25)$ et $(76;28)$.

□

Problème 25.11.
Le chef de fanfare rassemble ses musiciens et constate qu'il y a quelques absents. Il tente de les disposer en rangées de 6 et constate qu'il reste un musicien. Même en chose en les disposant en rangées de 7, de 3 ou de 4 : il reste toujours un musicien. Il finit par les mettre en rangées de 5 et là, ô miracle, cela tombe juste.

Combien de musiciens sont présents ce jour-là ?

♢ *Solutions.* Soit n le nombre de personnes dans la fanfare. n est solution du système de congruences suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 6 \\ n \equiv 1 \pmod 7 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod 4 \\ n \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$$

Or, ici, $\&textPGCD(6,4) \neq 1$ donc on peut simplifier ce système (en remarquant que $n \equiv 1 \pmod 6 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 3$ et $n \equiv 1 \pmod 2$) :

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 2 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 0 \pmod 5 \\ n \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

Ici,

$$\left.\begin{array}{r} \&textPGCD(2,3) \\ \&textPGCD(2,5) \\ \&textPGCD(2,7) \\ \&textPGCD(3,5) \\ \&textPGCD(3,7) \\ \&textPGCD(5,7) \end{array}\right\} = 1$$

donc, d'après le théorème des restes chinois, le système de congruences admet une unique solution. Cette solution peut être obtenu grâce à un algorithme :

Diviseurs	Reste	Valeur	Exp.
7	1	1	(1)
5	0	15	(2)
3	1	85	(3)
2	1	85	(4)

1. (1) On commence à 0 et on prend le plus petit nombre dont le reste par la divison euclidienne par 7 est 1, c'est bien entendu 1.

2. (2) Quand on divise 1 par 5, le reste de la division n'est pas 0 donc on teste les nombres de la forme $7k+1$ avec $1 \leqslant k \leqslant 4$:

$$\begin{gathered} k=1\,;7\times 1+1=8\equiv 3 \pmod 5 \\ k=2\,;7\times 2+1=15\equiv 0 \pmod 5 \\ \dots \end{gathered}$$

Le nombre qui convient est bien 15.

3. (3) Quand on divise 15 par 3, on obtient un reste par la division euclidienne de 0, ce qui ne correspond à la condition $n \equiv 1 \pmod 3$. On teste alors les nombres de la forme $(7\times 5)k+15 = 35k+15$ avec $1 \leqslant k \leqslant 2$

$$\begin{gathered} k=1\,;35\times 1+15=50\equiv 2 \pmod 3 \\ k=2\,;35\times 2+15=85\equiv 1 \pmod 3 \end{gathered}$$

On peut prendre le nombre 85.

4. (4) Quand on divise le nombre 85 par 2, on obtient comme reste par la division euclidienne de 1, ce qui correspond à notre condition.

Finalement :

$$\begin{cases} 85 \equiv 1 \pmod 7 \\ 85 \equiv 0 \pmod 5 \\ 85 \equiv 1 \pmod 3 \\ 85 \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

85 est donc solution de notre système de congruences. Conclusion : il y a 85 musiciens qui constituaient la fanfare. □

Problème 25.12.
Au rugby, il n'y a que 4 façons de marquer des points : la pénalité, le drop, l'essai et la transformation.

— Chaque pénalité ou drop réussi permet de marquer 3 points.

— Chaque essai non transformé rapporte 5 points.

— Chaque essai transformé rapporte 7 points (5 points pour l'essai et 2 points supplémentaires pour sa transformation).

Le match France-NZ (Nouvelle-Zelande) s'est terminé sur le score de 37-52. La NZ a marqué 6 essais. La France, qui a au moins marqué 1 essai, a marqué deux fois moins de pénalités que son adversaire. Aucun drop n'a été marqué.

Solutions. Voir la vidéo suivante à partir de 13 min 34 : `https://www.youtube.com/watch?v=uo_FR-mo4ek` □

25.6 Résolution d'inéquations

Problème 25.13.
Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

Entreprise A 110 € au départ et 1,75 € du kilomètre ;

Entreprise B 125 € au départ et 1,50 € du kilomètre.

À partir de quel kilométrage, le tarif du second transporteur est-il plus avantageux ?

◊ *Solution.* Soit x le nombre de kilomètres à parcourir :
- L'entreprise A facturera sa prestation : $110 + 1,75x$;
- l'entreprise B facturera sa prestation : $125 + 1,50x$.

Le transporteur B sera plus avantageux quand :

$$110 + 1,75x \geqslant 125 + 1,50x \Leftrightarrow 0,25x \geqslant 125 - 110 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x \geqslant 15 \Leftrightarrow x \geqslant 60.$$

À partir de 60 kilomètres, le transporteur B sera plus avantageux que le transporteur A. □

Problème 25.14.
Lors d'un match de football, le gardien de but doit dégager le ballon de sa zone vers les attaquants de son équipe.

Pour cela, il place le ballon au sol, sur sa ligne des 6 mètres et fait un dégagement. Ce tir forme une parfaite parabole : le ballon atteint une hauteur de 2 mètres, 60 mètres plus loin (donc à 66 mètres du bord du terrain) et retombe au sol à 70 mètres (donc à 76 mètres du bord du terrain).

À quel moment le ballon atteint une hauteur de 3 mètres ?

◊ *Solution.* La trajectoire du ballon est représenté par la courbe représentative d'une certaine fonction f du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(60) = 2 \\ f(70) = 0 \end{cases}.$$

Comme $f(0) = 0$, $c = 0$ et donc $f(x) = x(ax + b)$. On sait aussi que $f(70) = 0$ donc :

$$f(70) = 70(a \times 70 + b) = 0 \Leftrightarrow 70a = -b \Leftrightarrow a = -\frac{1}{70}b.$$

On peut avoir la valeur de b grâce à $f(60) = 2$:

$$f(60) = 60\left(-\frac{b}{70} \times 60 + b\right) = 2 \Leftrightarrow 60\left(\frac{70b - 60b}{70}\right) = 2 \Leftrightarrow 60 \times \frac{1}{7}b = 2$$

et donc : $b = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$. On peut donc en déduire la valeur de a : $a = -\frac{7}{30} \times \frac{1}{70} = -\frac{1}{300}$. On a alors :

$$f(x) = -\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x.$$

On veut savoir à quel moment le ballon atteint une hauteur de 3 mètres, il faut alors résoudre l'inéquation :

$$f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x - 3 \geqslant 0.$$

On étudie le signe du polynôme $-\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x - 3$ et donc les solutions de l'équation (E) : $-\frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{30}x - 3 = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{7}{30}\right)^2 - 4 \times (-3) \times \left(-\frac{1}{300}\right) = \frac{49}{900} - \frac{12}{300} = \frac{49 - 36}{900} = \frac{13}{900}.$$

Δ étant positif, l'équation (E) admet deux solutions réelles et $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{13}}{30}$. On a alors :

$$x_1 = \frac{-\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{13}}{30}}{2 \times \left(-\frac{1}{300}\right)} = \frac{\frac{7+\sqrt{13}}{30}}{\frac{2}{300}} = \frac{7 + \sqrt{13}}{30} \times \frac{300}{2} = 5(7 + \sqrt{13}) = 35 + 5\sqrt{13} \approx 53{,}02.$$

$$x_2 = 5(7 - \sqrt{13}) = 35 - 5\sqrt{13} \approx 16{,}97.$$

Le ballon est au-dessus de 3 mètres du sol pour une distance comprise entre 16, 97 m et 53, 02 m. □

25.7 Programmation linéaire

Problème 25.15.
Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois. Une table nécessite 3 heures de découpe et 2 heures de finition. Un buffet nécessite $1h30$ de découpage et 6 heures de finition. Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et 78 heures pour la finition. Cet artisan réalise un bénéfice de 200 € par table et 300 € par buffet.

Déterminer le nombre x de tables et y de buffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

◊ Soit x le nombre de tables à produire et y le nombre de buffets à produire.

— La quantité de tables à produire est positive donc $x \geqslant 0$.

— La quantité de buffets à produire est positive donc $y \geqslant 0$.

— En un mois, on ne peut produire que 18 meubles donc $x + y \leqslant 18$.

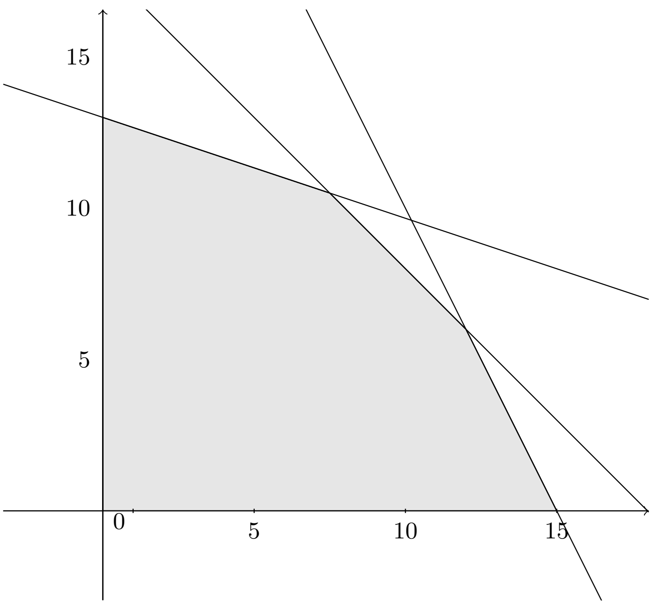
— En un mois, x est limité à 45 heures de découpage, une table nécessite 3 heures de découpage et un buffet, $1h30$ de découpage donc $3x + 1,5y \leqslant 45 \Leftrightarrow 6x + 3y \leqslant 90 \Leftrightarrow 2x + y \leqslant 30$.

— En un mois, on est limité à 78 heures de finition, une table nécessite 2 heures de finition et un buffet 6 heures de finition. Cela se traduit par l'inégalité $2x + 6y \leqslant 78 \Leftrightarrow x + 3y \leqslant 39$.

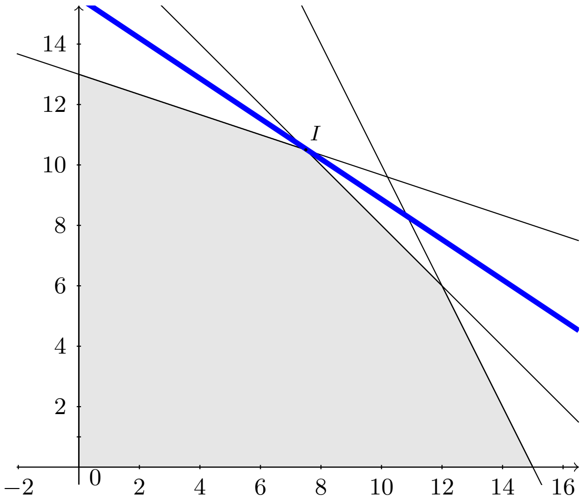
Donc les contraintes de production se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 18 \\ 2x + y \leqslant 30 \\ x + 3y \leqslant 39 \end{cases}.$$

On trouve le domaine des contraintes dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Le bénéfice B est une fonction de x et y. Elle s'exprime par $B(x, y) = 200x + 300y$.



Graphiquement, le point I du domaine des contraintes pour lequel le bénéfice est maximum est $(7{,}5; 10{,}5)$. Le bénéfice maximum est donc : $200 \times 7{,}5 + 300 \times 10{,}5 = 4650$.

LEÇON

26

Problèmes conduisant à une modélisation par des graphes ou par des matrices.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Terminale Maths Expertes

Prérequis : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$. Théorie sur les matrices et les graphes. Quelques résultats seront rappelés tout au long de la leçon si besoin.

Références :

[1] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Expertes*, Magnard 2020. [url]

[2] EduScol, *Mathématiques, Série S, Enseignement de spécialité - Matrices* [url]

[3] *Problème sur les matrices de Leontief*, Lycée Rosa Parks. [url]

[4] M. Colonval & A. Roumadni, *DM - Chiffre de Hill*, maths-au-quotidien.fr [url]

26.1 Modélisation à l'aide d'une matrice

26.1.1 Un problème à deux compartiments

[2]

26.1.2 Résolution d'un système d'équations

[1, ex 123 ch.6]

26.1.3 Résolution d'équations différentielles

[1, ex 133 ch.6]

26.1.4 Chiffre de Hill

[4]

26.1.5 Matrice de Leontief

[3]

26.1.6 Triangles rectangles pseudo isocèles

Bac Métropole 2017, Exercice 4

26.2 Modélisation à l'aide d'un graphe

26.2.1 Graphes eulériens

Bac ES Antilles-Guyane juin 2009 [2]

26.2.2 Les sept ponts de Königsberg

[1, ex 127 ch.6]

26.2.3 Relation binaire et graphes

[1, ex 108 ch.6]

26.2.4 Recherche du plus court chemin

[1, ex 57 ch.7]

26.2.5 Optimisation

[1, ex 110 ch.6]

26.2.6 Pertinence d'une page web

[1, p 234] [2]

26.3 Matrices et probabilités

26.3.1 Un problème de fromage

[1, ex 79 ch.7]

26.3.2 Contrat d'assurance

[1, ex 90 ch.7]

26.3.3 Les sauts du lapin

[1, ex 95 ch.7] [2]

26.3.4 Urnes de Ehrenfest

[1, p 235] [2]

LEÇON

27

FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Préambule

Niveau : seconde et première « Mathématiques Spécialité »

Prérequis : notion de fonctions, polynômes, résolution d'équations

Références :

[1] Contributeurs de WIKIPÉDIA, *Équations du second degré*. Wikipédia.

[2] C. BOULONNE, *Notes de cours, M101 : Fondements de l'algèbre*. L1 Mathématiques, 2006-2007.

[3] *Équations du second degré à une inconnue*. URL : http://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp.

[4] G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths 1re S*. Bordas, Programme 2001.

27.1 Fonction trinôme du second degré

Définition 27.1. *Fonction trinôme du second degré*

On appelle *fonction trinôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres et $a \neq 0$.

Remarque 27.2.
Une fonction trinôme est une fonction polynôme. On dit indifféremment fonction trinôme du second degré ou trinôme.

Exemples 27.3.

1. $f : x \mapsto (x+1)(x+2)$ et $g : x \mapsto (x-1)(x+1)$ sont des fonctions trinômes du second degré, car elles peuvent s'écrire $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = x^2 - 1$.
2. $h : x \mapsto (x-1)^2 - (x+2)^2$ n'est pas une fonction trinôme du second degré, car, en développant, on obtient $h(x) = 6x - 3$.

Propriété 27.4.
Pour tout trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, il existe deux nombres tels que :

$$f(x) = a[(x-\alpha)^2 - \beta].$$

Cette écriture est appelée *forme canonique* du trinôme.

Démonstration de la propriété 27.4. ♢ Comme $a \neq 0$, on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

d'où

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a[(x-\alpha)^2 - \beta] \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. □

Exemple 27.5.
On a :

$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$

$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. Donc :

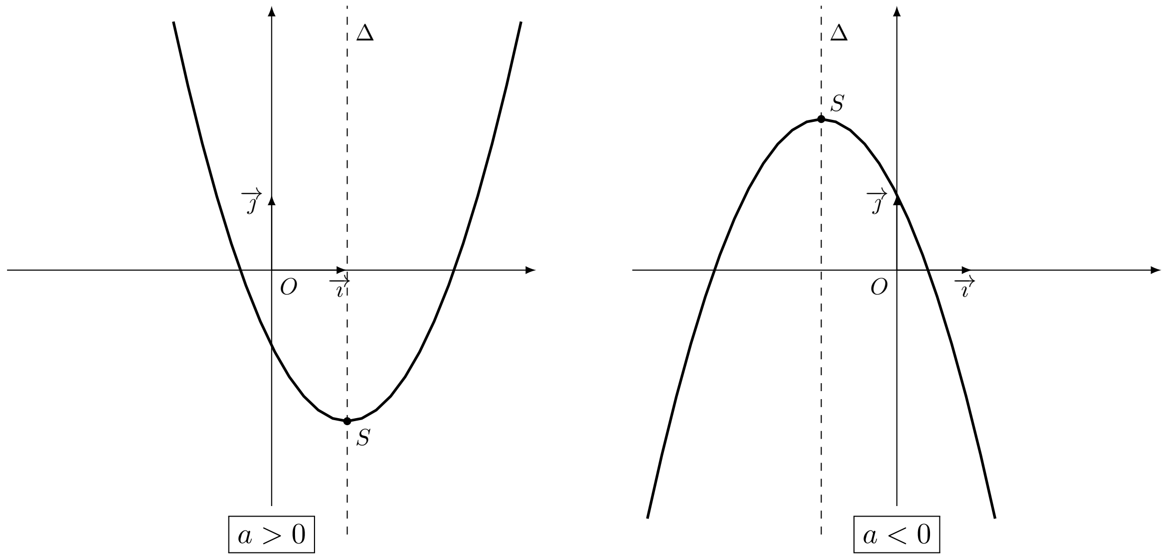
$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right].$$

D'où $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{11}{4}$.

D'après la propriété 27.4, la fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut aussi s'exprimer par $x \mapsto a[(x-\alpha)^2 - \beta]$. Donc f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto x^2$ par la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.

Propriété 27.6.
La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ s'obtient à partir de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$, puis « une multiplication par a ».

Conséquence 27.7.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, admet un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.



L'axe de symétrie dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $\Delta : x = -\dfrac{b}{2a}$ et les coordonnées de S dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $S\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

Définition 27.8. *Parabole*

Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, s'appelle une *parabole*. Son équation est $y = ax^2 + bx + c$.

Remarque 27.9.
On appelle aussi « parabole » la représentation de la fonction carré.

Propriété 27.10.
Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, une fonction trinôme. Les variations de f sur $\mathbb{R}$ sont :

— Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

f admet un *minimum* atteint en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

f admet un *maximum* atteint en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

▶ **Méthode 27.11.**
Pour donner le tableau de variations d'une fonction trinôme, il faut :

1. Ecrire $f(x)$ sous forme canonique : $f(x) = a[(x-\alpha)^2 + \beta]$.
2. Déduire le tableau de variations.

Exemple 27.12.
On donne le tableau de variation de f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On écrit $f(x)$ sous forme canonique :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

soit :

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Sachant que $a > 0$, f admet un minimum $f\left(\frac{3}{2}\right)$, soit $-\frac{5}{4}$. On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	

27.2 Equations du second degré

27.2.1 Mise sous forme canonique

Théorème 27.13.
Pour tout trinôme $f : ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe deux nombres α et β tels que :

$$f(x) = a[(x-\alpha)^2 - \beta].$$

Cette écriture est appelée *forme canonique.*

Démonstration. Voir démonstration de la propriété 27.4. □

Exemple 27.14.
Mettre sous forme canonique $2x^2 - 6x - 1$.

Solution. ◊ On a :

$$2x^2 - 6x - 1 = 2\left(x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right).$$

$x^2 - 3x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$
$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2\left(x^2-3x-\frac{1}{2}\right) &= 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{4}\right]. \end{aligned}$$

et on trouve : $\alpha = \dfrac{3}{2}$ et $\beta = \dfrac{11}{4}$.

□

27.2.2 Résolution

Définition 27.15. *Discriminant*

On appelle *discriminant* de l'expression ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$, le nombre b^2-4ac, noté Δ.

Théorème 27.16.
Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ.

Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles distincts x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{a}$$

On a : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions *complexes* conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. ♢ Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ (avec $a \neq 0$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$). L'équation s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0.$$

On pose $\Delta = b^2-4ac$, elle s'écrit donc

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0,$$

soit à résoudre :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

car $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$ alors Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

L'équation s'écrit :

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0.$$

Donc soit $x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou soit $x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ et ainsi :

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ s'écrit $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Ce carré est nul si et seulement si, $\left(x+\frac{b}{2a}\right) = 0$, soit $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ pas de solutions réelles mais en passant par les complexes, $\frac{\Delta}{4a^2}$ est le carré de $\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et l'on revient au cas $\Delta > 0$.

□

27.2.3 Exemples de résolution

Exemples 27.17.

1. Résoudre $2x^2 - 5x - 4 = 0$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $2z^2 + 10z + 25 = 0$.

Solution. ◊

1. Soit à résoudre $2x^2-5x-4=0$. Le discriminant de l'expression $2x^2-5x-4$ est $\Delta = 25+4\times4\times2 = 25+32 = 57 > 0$. Donc l'équation $2x^2-5x-4=0$ admet deux solutions :
$$x_1 = \frac{5+\sqrt{57}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{57}}{4}.$$
2. Soit à résoudre $2z^2+10z+25=0$. Le discriminant de l'expression $2z^2+10z+25$ est $\Delta = 10^2 - 4\times25\times2 = -100 < 0$. Il y a donc deux racines complexes :
$$z_1 = \frac{-10+10\mathrm{i}}{2\times2} = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i} = \frac{5}{2}(-1+\mathrm{i})$$
$$z_2 = \frac{-10-10\mathrm{i}}{2\times2} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i}.$$
Ne nous arrêtons pas en si bon chemin. Calculons la forme exponentielle de z_1 et z_2. Tout d'abord, on calcule le module de z_1 et z_2 :
$$|z_1| = |z_2| = \frac{5}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$
On calcule maintenant l'argument θ_1 de z_1 :
$$\frac{z_1}{|z_1|} = \cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \frac{\frac{5}{2}(-1+\mathrm{i})}{\frac{5}{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$
donc :
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_1 &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$
Donc :
$$z_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}.$$
Pour z_2, son argument θ_2 est tel que :
$$\frac{z_2}{|z_2|} = \cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \frac{\frac{5}{2}(-1-\mathrm{i})}{\frac{5}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$
donc
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_2 &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_2 &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$
et ainsi,
$$z_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}.$$

□

27.3 Signe du trinôme du second degré

Propriété 27.18.
Soit $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant Δ. Le signe de $ax^2 + bx + c$ est :
- Si $\Delta < 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ ($ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine).
- Si $\Delta = 0$, le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ sauf x_0 (x_0 est la racine de $ax^2 + bx + c$).
- Si $\Delta > 0$,
  - le signe de a pour tout x de $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$
  - le signe de $-a$ pour tout x de $]x_1; x_2[$

  (x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$ ($x_1 < x_2$)).

◇ *Démonstration de la propriété 27.18.* $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique s'écrit
$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right] - \frac{\Delta}{4a^2}$$
avec $a \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est positif et le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et son signe est celui de a sauf pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ se factorise :
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
  Soit $x_1 < x_2$, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		$\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(-a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$	

  où $\mathrm{sgn}(a)$ est le signe de a.

□

Exemple 27.19.
On note $f(x) = x^2 + x - 2$. On cherche le signe de f. $\Delta = 9$ et $f(x)$ a deux racines : -2 et 1. Le coefficient a de x^2 est positif. Donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]-2; 1[$ (« entre » les racines) ; $f(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty; 2[\cup]1; +\infty[$ (« à l'extérieur » des racines).

On veut déterminer le signe d'un trinôme du second degré.
1. Si le cas est évident, le signe se déduit directement.
2. Sinon calculer le discriminant Δ.
   - Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.
   - Si $\Delta = 0$, le trinôme est toujours du signe de a et nul pour $x = -\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a « à l'extérieur des racines » et du signe opposé à a « entre les racines ».

Exemples 27.20.

1. On cherche le signe de $2x^2 - 3x + 4$. On calcule le discriminant $\Delta = -23$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2 - 3x + 4$ est positif sur $\mathbb{R}$.
2. On veut résoudre l'inéquation $x^2 - 3 < 0$. L'équation $x^2 - 3 = 0$ se résout sans discriminant, elle admet deux racines :
$$x_1 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$
Le coefficient de x^2 est positif :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation $x^2 - 3 \leqslant 0$ a pour solution $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$.
3. On veut résoudre l'inéquation $3x^2 - 2x + 4 < 0$. On calcule le discriminant $\Delta = -44$. Δ étant négatif et le coefficient de x^2 positif : $2x^2 - 3x + 4$ est positif sur $\mathbb{R}$. L'inéquation $3x^2 - 2x + 4 < 0$ n'a pas de solution.

27.4 Applications

27.4.1 Nombres consécutifs

Déterminer deux nombres entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés est 221.

$\Diamond$ *Solution.* On forme l'équation :

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 = 221 \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = 221 &\Leftrightarrow 2n^2 + 2n + 1 = 221 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 + 2n - 220 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'expression $n^2 + n - 110$ est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-110) = 1 + 440 = 441 > 0$, d'où $\sqrt{\Delta} = \sqrt{441} = 21$ et il y a deux solutions pour l'équation $n^2 + n - 110 = 0$:

$$n_1 = \frac{-1 + 21}{2} = 10 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-1 - 21}{2} = -11.$$

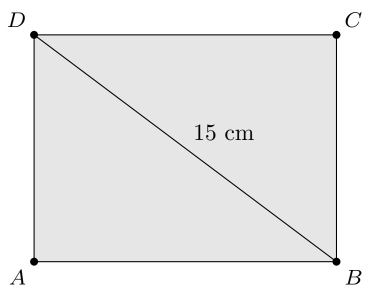
Ainsi :

$$10^2 + 11^2 = 100 + 121 = 221 \quad \text{et} \quad (-11)^2 + (-10)^2 = 121 + 100 = 221.$$

$\square$

27.4.2 Périmètre et diagonale d'un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle dont la diagonale $[BD]$ mesure 15 cm et le périmètre P du rectangle vaut 42 cm. Quels sont les dimensions du rectangle $ABCD$?



$\mathscr{P}_{ABCD} = 42$ cm

◊ *Solution.* Soit L la longueur du rectangle (ce qui correspond à la mesure du côté $[AB]$) et ℓ la largeur du rectangle (ce qui correspond à la mesure du côté $[AD]$). ℓ et L vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2(\ell+L)=42 \\ \ell^2+L^2=15^2 \text{ (d'après le thm. de Pythagore)} \\ (\ell, L \geqslant 0,\ \ell<L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell+L=21 \\ \ell^2+L^2=15^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L=21-\ell \\ \ell^2+(21-\ell)^2=225 \quad (2) \end{cases}$$

On résoud l'équation (2) :

$$(2) \Leftrightarrow \ell^2+(21-\ell)^2=225 \Leftrightarrow \ell^2+\ell^2-42\ell+441-225=0$$
$$\Leftrightarrow 2\ell^2-42\ell+216=0 \Leftrightarrow \ell^2-21\ell+108=0.$$

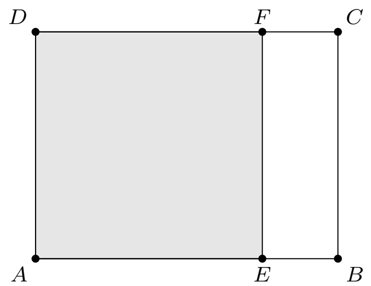
Le discriminant de l'expression $\ell^2-21\ell+108$ est $\Delta=441-432=9>0$ donc $\sqrt{\Delta}=3$ et l'équation (2) admet deux solutions :

$$\begin{cases} \ell_1=\frac{21+3}{2}=\frac{24}{2}=12 \\ L_1=21-12=9 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ell_2=\frac{21-3}{2}=\frac{18}{2}=9 \\ L_2=21-9=12. \end{cases}$$

Or $L>\ell$, donc les dimensions du rectangle $ABCD$ sont $\ell=9$ cm et $L=12$ cm. □

27.4.3 Nombre d'or

Soit R un rectangle. On note $\mathscr{Q}(R)$, le rapport de la longueur avec la largeur du rectangle R. Soit R_1 le rectangle $ABCD$ de longueur L et de largeur ℓ. On trace un carré $AEFD$ (qu'on nomme $\mathscr{C}$) avec $E\in[AB]$ et $F\in[CD]$ puis on obtient le rectangle $EBCF$ (qu'on nomme $\mathscr{R}_2$). On dit que $\mathscr{R}_1$ est un rectangle d'or si $\mathscr{Q}(R_1)=\mathscr{Q}(R_2)$ (on notera $\Phi=\mathscr{Q}(R_1)$). Quelle est la valeur exacte de Φ ?



$\mathscr{R}_1=ABCD$

$\mathscr{C}=AEFD$

$\mathscr{R}_2=EBCF$

◊ *Solution.* On forme l'équation :

$$\mathscr{Q}(R_1)=\mathscr{Q}(R_2) \Leftrightarrow \frac{L}{\ell}=\frac{\ell}{L-\ell} \Leftrightarrow \frac{L(L-\ell)}{\ell^2}=1$$
$$\Leftrightarrow L^2-L\ell=\ell^2 \Leftrightarrow L^2-L\ell-\ell^2=0$$

On note $\Phi=\dfrac{L}{\ell}$, on peut diviser par ℓ^2 (car $\ell\neq 0$) :

$$\Leftrightarrow \frac{L^2}{\ell^2}-\frac{L}{\ell}-1=0 \Leftrightarrow \Phi^2-\Phi-1=0.$$

Le discriminant de l'expression $\Phi^2-\Phi-1$ est $\Delta=1+4=5>0$. Donc :

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\geqslant 0.$$

À noter qu'on trouve une autre solution de l'équation :

$$\tilde{\Phi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0.$$

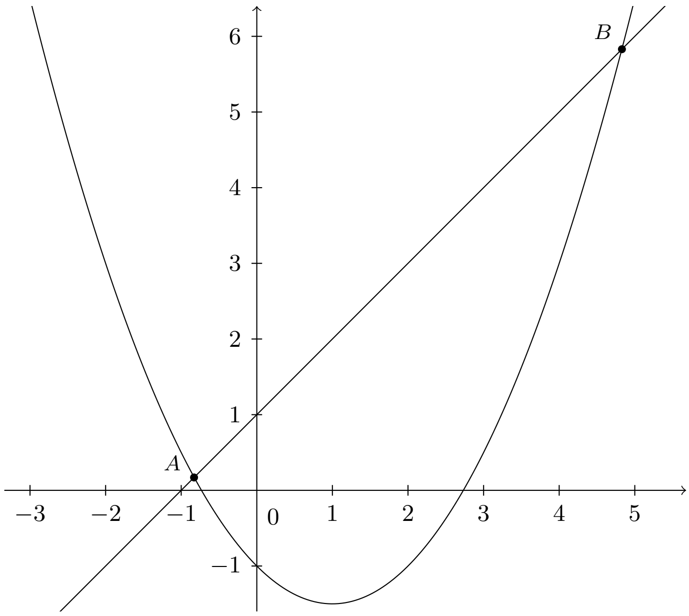
Comme le rapport $\dfrac{L}{\ell}$ est positif, on prend juste la valeur de Φ. □

27.4.4 Intersection d'une parabole et une droite

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{2} - x - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ (resp. $\mathscr{C}_g$) la courbe représentative de la fonction f (resp. g). Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?



♢ *Solution.* On cherche les coordonnées des points d'intersections A et B des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Trouver les coordonnées des points d'intersections revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x - 1 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'expression $2x^2 - 3x - 3$ est $\Delta = 9 + 4 \times 3 \times 2 = 33 > 0$. Donc $\sqrt{\Delta} = 33$ et l'équation admet deux solutions :

$$\begin{cases} x_A = \frac{3+\sqrt{33}}{4} \\ y_A = \frac{7+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_B = \frac{3-\sqrt{33}}{4} \\ y_B = \frac{7-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

□

27.4.5 Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

Résolution

Théorème 27.21.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$ admet deux solutions (distinctes ou confondues) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

où $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Démonstration. ♢ Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{27.1}$$

On met l'équation (27.1) sous la forme canonique :

$$\begin{aligned}(27.1) &\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.\end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $w = z + \frac{b}{2}$. D'où :

$$(27.1) \Leftrightarrow w^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Soit δ une racine carrée de Δ, les deux solutions de (27.1) sont donc :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

□

Un exemple

Résoudre $\mathrm{i}z^2 - (3 + 8\mathrm{i})z + 13 + 13\mathrm{i} = 0$.

♢ *Solution.* On obtient :

$$\begin{aligned}\Delta &= (3 + 8\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(13 + 13\mathrm{i}) = 9 + 48\mathrm{i} - 64 - 13 \times 4(\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}))\\ &= -55 + 48\mathrm{i} - 52(\mathrm{i} - 1) = -55 + 52 + 48\mathrm{i} - 52\mathrm{i} = -3 - 4\mathrm{i}.\end{aligned}$$

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = -3 - 4\mathrm{i}$. On a : $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$ et $|\delta|^2 = a^2 + b^2$. De plus $|\Delta| = \sqrt{9 + 16} = 5$. On en déduit :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5\\ a^2 - b^2 = -3\\ 2ab = -4 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a^2 = 1\\ b^2 = 4\\ ab = -2 \end{cases}$$

On trouve ainsi les racines de Δ :

$$\delta_1 = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -1 + 2\mathrm{i}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3 + 8\mathrm{i}) - (-1 + 2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{4 + 6\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i};\\ z_2 &= \frac{(3 + 8\mathrm{i}) + (-1 + 2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{2 + 10\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 5 + \mathrm{i}.\end{aligned}$$

□

27.4.6 La parabole vue comme une conique

Définition 27.22.
On appelle *conique*, l'ensemble des courbes qui s'obtiennent par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.

La parabole s'obtient en intersectant le plan de façon parallèle à l'une des génératrices du cône.

Définition 27.23.
Soient D une droite et F un point n'appartenant pas à D, et soit P le plan contenant la droite D et le point F. On appelle *parabole de droite directrice* D et *de foyer* F l'ensemble des points M du plan P vérifiant :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = 1$$

où $d(M,F)$ mesure la distance du point M au point F et $d(M,D)$ mesure la distance du point M à la droite D.

Remarque 27.24.
La parabole est donc une conique dont l'excentricité e vaut 1.

27.4.7 Équations

À partir du foyer et de la directrice

Si la parabole est donnée par son foyer F et sa directrice $\mathscr{D}$, soit O le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$, on appelle le *paramètre de la parabole* (qu'on note p) la distance OF. On considère S le milieu de $[FO]$.

Propriété 27.25.
Dans le repère orthonormé $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\jmath}$ a même direction et sens que $\overrightarrow{OF}$, l'équation de la parabole est :

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

À partir de l'équation générale

Soit l'équation :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormal. Si $B^2 - AC = 0$ alors cette équation est celle d'une parabole ou de deux droites parallèles.

Soit l'équation :

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormal. Si $AC = 0$ avec AE ou DC non nul alors cette équation est celle d'une parabole.

Enfin, dans tout repère orthonormal, l'équation d'une droite est de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \text{avec } B^2 - AC = 0.$$

Équation polaire

Dans le repère $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ où O est le foyer et l'axe polaire en est l'axe focal, l'équation de la parabole est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \frac{p}{1+\cos(\theta)}\vec{e_r}.$$

27.4.8 Quelques propriétés géométriques de la parabole

Cordes parallèles

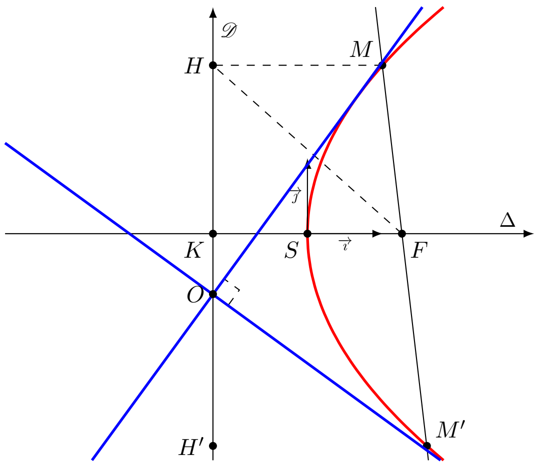
Toutes les cordes parallèles ont leur milieu situé sur une droite perpendiculaire à la directrice. La tangente parallèle à cette direction a son point de contact sur cette droite. Les deux tangentes à la parabole aux extrémités d'une telle corde se coupent sur cette droite.

Tangente et bissectrice

Si A est un point sur une parabole définie par un foyer F et une directrice (d), alors la tangente de la parabole en A est la bissectrice intérieure de l'angle formée par F, A et le projeté orthogonal de A sur (d).

Propriété relative à l'orthoptique

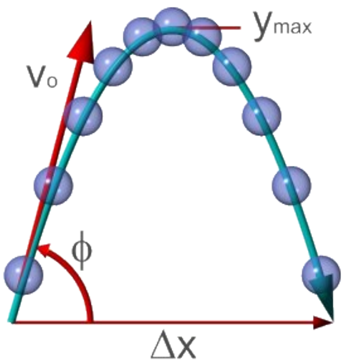
Soient M et M' les points d'intersection d'une droite passant par le foyer de la parabole avec la parabole. Les deux tangentes de la parabole passant par M et M' se coupent sur la directrice en formant un angle droit entre elles. De plus, si on appelle H et H' les projetés respectifs de M et M' sur la directrice et O le point d'intersection des deux tangentes et de la directrice, alors O est le milieu $[HH']$.



En se déplaçant le long de sa directrice, la parabole est toujours vue sous un angle droit.

27.4.9 Applications à la physique

La parabole est la trajectoire décrite par un objet que l'on lance si on peut négliger la courbure de la Terre, le frottement de l'air (vent, ralentissement de l'objet) et la variation de la gravité avec la hauteur.



LEÇON

28

Suites numériques. Limites.

Préambule

Niveau : première « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Spécialité » et « Mathématiques Complémentaires »

Prérequis : notion de fonctions, continuité, dérivabilité, théorème du point fixe

Références :

[1] G. Bontemps & al., *Fractale, Maths 1re S.* Bordas, Programme 2001.

[2] G. Costantini, *Les suites.* Première S.

[3] X. Delahaye, *Les suites numériques, limites.* Première S. [url]

[4] M. Cuaz, *Suites arithmético-géométriques.*

[5] *Suites arithmétiques, suites géométriques.* CNED Académie en Ligne. [url]

28.1 Suites numériques, définition

Définition 28.1. *Suite numérique*

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. L'image d'un entier naturel n est notée $u(n)$ ou u_n, n est appelé *l'indice* ou le *rang* du terme u_n. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemples 28.2.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Cette suite est définie en fonction du rang (elle est de type $u_n = f(n)$ où f est une fonction). On obtient :

$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$

Cette suite est définie en fonction de terme(s) précédent(s) (on dit que c'est une suite récurrente). On obtient :

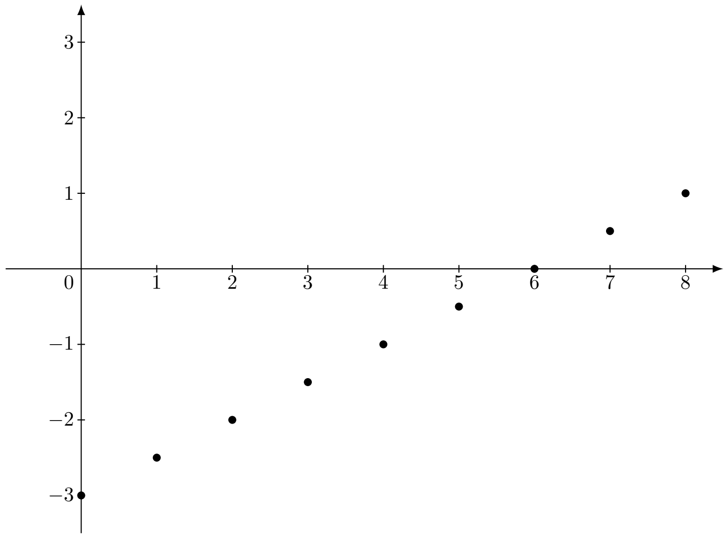
$$u_1 = u_0(1-u_0) = -2,\ u_2 = -6,\ u_3 = -42.$$

Remarque 28.3.
Une suite comportant un nombre fini de termes peut aussi être définie par un tableau de valeurs. Par exemple :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	-5	6	7	10	-15	21

Définition 28.4.
On appelle représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n).

Exemple 28.5.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{2}n - 3$. On donne une représentation graphique de la suite.



28.2 Suites monotones

Définition 28.6.
Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
- On dit que (u_n) est *croissante* si : pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* si : pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *stationnaire* si : pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques 28.7.
1. On définit de la même façon une suite strictement croissante ou strictement décroissante en utilisant des inégalités strictes.
2. Une suite croissante ou décroissante est appelée suite *monotone*.
3. Étudier le sens de variation d'une suite, c'est déterminer si une suite est croissante ou décroissante (ou ni l'un ni l'autre). Cette étude peut se faire en calculant la différence $u_{n+1} - u_n$ et en déterminant si cette différence a un signe constant.
4. La définition d'une suite croissante (ou d'une suite décroissante) n'est pas identique à la définition d'une fonction croissante. Dans le cas d'une suite, on compare deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} dans le cas d'une fonction on compare les images de deux réels quelconques a et b.

Exemples 28.8.

1. La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 = 2n + 1 > 0.$$
2. La suite $(-2n+3)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3) = -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2 < 0.$$
3. La suite $(-1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{2n+1} - u_{2n} = (-1)^{2n+1} - (-1)^{2n} = -1 - 1 = -2 < 0$$
$$u_{2n+2} - u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+1} = 1 - (-1) = 2 > 0.$$
4. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Propriété 28.9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geqslant p$ alors $u_n \geqslant u_p$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Si $n \geqslant p$ alors $u_n \leqslant u_p$.

◊ *Justification de la propriété 28.9.* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Si $n \geqslant p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant croissante, on peut alors écrire :
$$u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant \cdots \leqslant u_{p+k}.$$
Donc $u_p \leqslant u_n$, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_p$.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Si $n \geqslant p$, on peut écrire $n = p + k$ avec k un entier naturel ($k = n - p$). La suite (u_n) étant décroissante, on peut alors écrire :
$$u_p \geqslant u_{p+1} \geqslant u_{p+2} \geqslant \cdots \geqslant u_{p+k}.$$
Donc $u_p \geqslant u_n$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_p$.

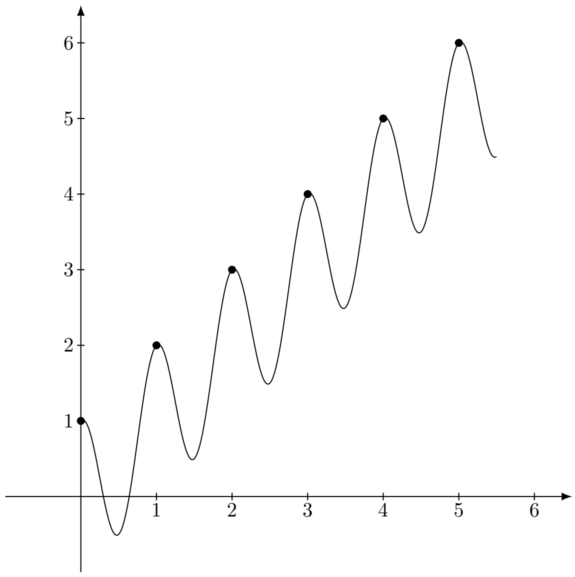
□

Propriété 28.10.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction croissante sur $[n_0 ; +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $u_n = f(n)$ est une suite croissante.

Justification de la propriété 28.10. Soit f une fonction croissante sur $[n_0 ; +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $u_n = f(n)$. Soit $n \geqslant n_0$. On a de façon évidente, $n + 1 \geqslant n$. La fonction f étant croissante sur $[n_0 ; +\infty[$, on en déduit que $f(n+1) \geqslant f(n)$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc $u_{n+1} \geqslant u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante. □

Remarques 28.11.

1. On a une propriété identique avec une fonction décroissante.
2. La condition est suffisante, mais pas nécessaire, c'est-à-dire que la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas. Par exemple, sur la figure ci-dessous, la fonction $f(x) = \cos(2\pi x) + x$ n'est pas croissante et pourtant, la suite $u_n = f(n)$ est croissante.



Exemple 28.12.
On peut démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est croissante en justifiant que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$.

28.3 Quelques exemples de suites numériques

28.3.1 Suites arithmétiques

Définition 28.13. *Suite arithmétique*
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel. Le nombre r s'appelle la *raison* de la suite arithmétique.

Remarque 28.14.
Une suite arithmétique est donc définie par son premier terme u_0 et sa raison r. On a alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r \\ &\dots \end{aligned}$$

Propriété 28.15.
Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raisons r, alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Exemple 28.16.
Soit u la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Exprimer le terme u_n de la suite en fonction de n. En déduire les 10 premières valeurs de la suite.

Solution. ♢ On a $u_n = 3n + 1$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

□

Propriété 28.17.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres réels r et b tels que, pour tout n, $u_n = b + nr$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme b.

Exemple 28.18.
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{152n+30}{6}$. Montrer que cette suite est arithmétique.

Solution. ♢ On a, pour tout n, $u_n = \dfrac{76}{3}n + 5$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{76}{3}$ et de premier terme 5. □

Remarques 28.19.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Si $n > m > 0$ alors :
$$u_n = u_m + (n-m)r.$$
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier trerme u_0. Pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = r$. On a ainsi :
   — si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
   — si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

Propriété 28.20.
Soit S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r. On a :
$$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration. ♢ Soit :
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \qquad (28.1)$$
$$S_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0 \qquad (28.2)$$
On en déduit que :
$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0).$$
On a :
$$\begin{aligned} u_0 + u_n &= u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr \\ u_1 + u_{n-1} &= (u_0 + r) + (u_0 + (n-1)r) = 2u_0 + nr \\ u_2 + u_{n-2} &= (u_0 + 2r) + (u_0 + (n-2)r) = 2u_0 + nr \\ &\cdots \end{aligned}$$
Toutes ces sommes sont égales à $u_0 + u_n$. On obtient :
$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n).$$
La somme précédente comporte $(n+1)$ termes égaux à $(u_0 + u_n)$, d'où :
$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n).$$
□

Exemple 28.21.
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 30n - 6$. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
On a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)(15n-6).$$

Remarque 28.22.
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique s'obtient par la formule :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Conséquence 28.23.
La suite des entiers naturels non nuls est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{28.3}$$

Démonstration. ♢ On peut montrer la formule (28.3) par récurrence.

Initialisation Pour $n = 1$, la formule est valable :

$$\frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

Hérédité On suppose que, pour un entier donné n, la formule

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

est vérifiée. On vérifie que la formule est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + 1 &= 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée pour le rang $n+1$.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

28.3.2 Suites géométriques

Définition 28.24. *Suite géométrique*
La suite (u_n) est *géométrique* si, pour tout $u_{n+1} = qu_n$, où q est un nombre réel non nul. Le nombre q s'appelle la *raison* de la suite géométrique.

Remarques 28.25.

1. Si les termes de la suite ne sont pas nuls, alors, pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
2. Une suite géométrique est définie par son premier terme u_0 et sa raison q. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 q \\ u_2 &= u_1 q = u_0 q^2 \\ u_3 &= u_2 q = u_0 q^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Propriété 28.26.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (q non nul) alors, pour tout n, on a : $u_n = u_0 q^n$.

Exemple 28.27.
Soit u la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3. Exprimer le terme u_n de la suite en fonction de n. En déduire les 10 premiers termes de la suite.

◊ On a : $u_n = 3^n$ et on obtient le tableau de valeurs suivant.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Propriété 28.28.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il existe deux nombres a et q non nuls tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

Exemple 28.29.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 5 \times \dfrac{76^n}{3^n}$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

◊ On a :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{76}{3}\right)^n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{76}{3}$ et de raison 5.

Remarque 28.30.
Soit la suite géométrique (u_n) définie par $u_n = q^n$ ($q > 0$). Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$. Donc :

- si $q > 1$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$ alors $u_{n+1} - u_n = 0$ et la suite (u_n) est constante.

Propriété 28.31.
Soit S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q (q différent de 1). On a :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Démonstration. ◊ Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite. On peut écrire :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$qS_n = u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}$$

Alors $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1}$ soit $(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$, d'où :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{car } q \neq 1.$$

□

Exemple 28.32.

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{76}{3}$ et de premier terme 5. Calculer $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

◊ On veut calculer la somme $S_3 := u_0 + u_1 + u_2 + u_3$. On a :

$$S_3 = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{76}{3}\right)^4}{1 - \frac{76}{3}} = \frac{2285075}{27}.$$

Conséquence 28.33.
Pour tout nombre réel $x \neq 1$, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

Exemple 28.34.
◊

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = \frac{1 - 2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

28.3.3 Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

► **Méthode 28.35.** ◊ *Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique*

1. **Écrire le terme général sous la forme** $u_n + nr = u_0$
   — Montrer qu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n, $u_n = nr + u_0$.
   — Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
2. **Étudier la différence** $u_{n+1} - u_n$
   — Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et montrer qu'elle est constante et égale à r.
   — Conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
3. **Écrire le terme sous la forme** $u_n = u_0 q^n$
   — Montrer qu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n$.
   — Conclure que (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
4. **Trouver une relation de la forme** $u_{n+1} = qu_n$
   — Montrer que l'on peut écrire $u_{n+1} = qu_n$ (avec $q \neq 0$).
   — Conclure que (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Remarque 28.36.
◊ Dans la méthode 4, on peut montrer aussi que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant sous conditions que tous les termes de la suite soient non nuls.

Exemples 28.37.
◊

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -5n+12$ et la suite (v_n) vérifiant pour tout n, $v_n = 2u_n+n+5$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \dfrac{nv_n + 4}{n+1}$ et de premier terme $v_1 = 1$. Montrer que la suite (u_n) vérifiant $u_n = nv_n$ est une suite arithmétique.
3. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2(-5)^{n+1}\left(\dfrac{10}{3}\right)^n$ est une suite géométrique.
4. Soit la suite (v_n) de premier terme v_0 avec $v_0 = 3$ et définie par $v_{n+1} = -7v_n + 8$. Montrer que la suite (u_n) vérifiant, pour tout n, $u_n = v_n - 1$ est une suite géométrique.

28.4 Suites minorées, majorées

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{2\times 0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \simeq 0{,}5 \quad ; \quad u_1 = \frac{2\times 1+1}{1+2} = \frac{3}{3} \simeq 1 \\
u_2 &= \frac{2\times 2+1}{2+2} = \frac{5}{4} \simeq 1{,}25 \quad ; \quad u_3 = \frac{2\times 3+1}{3+2} = \frac{7}{5} \simeq 1{,}4 \\
u_4 &= \frac{2\times 4+1}{4+2} = \frac{9}{6} \simeq 1{,}5 \quad ; \quad u_5 = \frac{2\times 5+1}{5+2} = \frac{11}{7} \simeq 1{,}57
\end{aligned}$$

On montre que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $\dfrac{2n+1}{n+2} > 0$ donc $u_n > 0$.
2. D'autre part, on peut écrire :

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+1-2n-4}{n+2} = \frac{-3}{n+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+2 > 0$ donc $\dfrac{-3}{n+2} < 0$ donc $u_n - 2 < 0$ donc $u_n < 2$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Ainsi, on peut penser que quand n est très grand, u_n est très proche de 2 (on dira que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$ est 2).

Définition 28.38.
Si pour tout entier n, on a $u_n \leqslant M$, on dit que la suite (u_n) est *majorée* par M. M est un *majorant* de la suite (u_n).

Si pour tout entier n, on a $u_n \geqslant m$, on dit que la suite (u_n) est *minorée* par m. m est un *minorant* de la suite $(u_n)_n$.

On dit que la suite (u_n) est *bornée* par m et M si elle est *minorée* par m et *majorée* par M.

Exemple 28.39.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 18$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1. On calcule u_1, u_2 et u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 18 + 3 = 9 + 3 = 12$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \times 12 + 3 = 6 + 3 = 9$$
$$u_3 = \frac{1}{2} \times 9 + 3 = \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

2. On peut calculer $u_4, u_5, \ldots, u_{10}$ sur une calculatrice TI-82 en faisant :

```
18 -> A
A * 1/2 + 3 -> A
```

où `->` peut être obtenu en tapant sur la touche STO> . Il suffit ensuite d'appuyer plusieurs fois sur la touche ENTER pour obtenir les valeurs approchées successives des termes de la suite :

```
6.75
6.375
6.1875
6.09375
6.046875
6.0234375
6.01171875
```

3. Supposons $u_n \geqslant 0$, alors $\frac{1}{2}u_n \geqslant 0$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 0$. Donc si u_n est positif alors u_{n+1} est positif. On sait que u_0 est positif. On peut en déduire que u_1 positif. Sachant que u_1 est positif, on en déduit que u_2 est positif. Sachant que u_2 est positif, on en déduit que u_3 est positif. En poursuivant le raisonnement, on peut conclure que u_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On montre que (u_n) est décroissante. Supposons que $u_n \geqslant 6$ alors $\frac{1}{2}u_n \geqslant 3$ donc $\frac{1}{2}u_n + 3 \geqslant 6$ donc $u_{n+1} \geqslant 6$. Donc si $u_n \geqslant 6$ alors $u_{n+1} \geqslant 6$. On sait que $u_0 = 18$ donc $u_0 \geqslant 6$. On peut en déduit que $u_1 \geqslant 6$, etc. On conclut alors que $u_n \geqslant 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n.$$

On sait que $u_n \geqslant 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\frac{1}{2}u_n \geqslant 3$ donc $-\frac{1}{2}u_n \leqslant -3$ donc $3 - \frac{1}{2}u_n \leqslant 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (v_n) est définie par $v_n = 6 + \frac{12}{2^n}$. On a :

$$v_0 = 6 + \frac{12}{2^0} = 6 + \frac{12}{1} = 6 + 12 = 18$$
$$v_1 = 6 + \frac{12}{2^1} = 6 + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12$$
$$v_2 = 6 + \frac{12}{2^2} = 6 + \frac{12}{4} = 6 + 3 = 9$$
$$v_3 = 6 + \frac{12}{2^3} = 6 + \frac{12}{8} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.$$

6. On peut écrire $v_{n+1} = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}$ et

$$\frac{1}{2}v_n + 3 = \frac{1}{2} \times \left(6 + \frac{12}{2^n}\right) + 3 = 3 + \frac{1}{2} \times \frac{12}{2^n} + 3$$

donc

$$\frac{1}{2}v_n + 3 = 6 + \frac{12}{2^{n+1}}.$$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme on a d'autre part $v_0 = 18 = u_0$, les suites (u_n) et (v_n) sont définies par le même premier terme et la même relation de récurrence. Donc : la suite (v_n) est identique à la suite (v_n).

28.5 Limites de suites

28.5.1 Notion de limite infinie d'une suite

Définition 28.40. *Limite infinie d'une suite*

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si, pour tout nombre A positif, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout nombre A positif, l'inégalité $u_n \geqslant A$ est vraie à partir d'un certain rang.

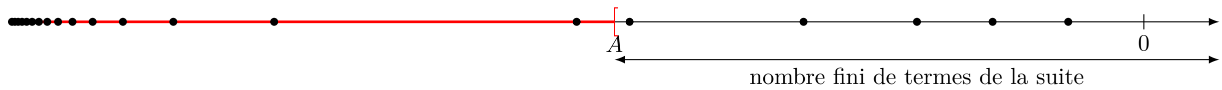
Figure 28.1 – Limite infinie d'une suite (en $+\infty$)

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque 28.41.
On définit de manière analogue une suite qui tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{n\to-\infty} u_n = -\infty.$$



Propriétés 28.42. *Limite des suites de référence*

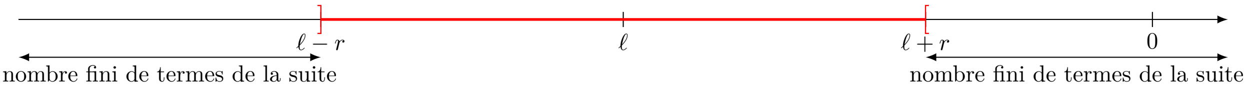
- $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$,
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Propriété 28.43. *Limites et opposés*
$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

28.5.2 Limites finies - Suites convergentes

Définition 28.44.

On dit que la suite (u_n) *tend vers un nombre* ℓ si tout intervalle du type $]\ell - r; \ell + r[$ (avec $r > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Remarque 28.45.
Dire que la suite (u_n) tend vers un nombre ℓ, revient aussi à dire que :

1. L'inégalité $|u_n - \ell| < r$ est vraie à partir d'un certain rang ;
2. La double inégalité $\ell - r < u_n < \ell + r$ est vraie à partir d'un certain rang.

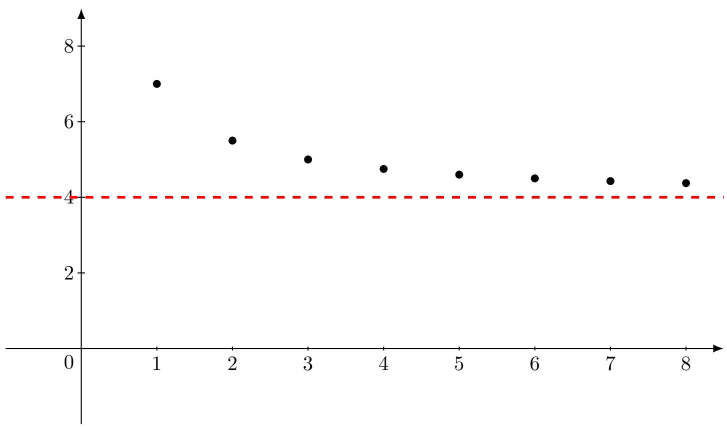
Exemple 28.46.
Soit la suite définie par $u_n = \frac{3}{n}$. Pour $r > 0$, $0 < \frac{3}{n} < r$ est équivalent à $n > \frac{3}{r}$. Donc, pour n assez grand, $-r < u_n < r$. La suite (u_n) tend vers 0.

Propriété 28.47.
Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ, alors la limite ℓ est unique.

Si une suite (u_n) a une limite ℓ, on dit aussi que la suite est convergente ou qu'elle converge vers ℓ et on écrit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété 28.48.
Dire qu'une suite (u_n) tend vers un nombre ℓ équivaut à dire que la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

Exemple 28.49.
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4n+3}{n}$. L'observation de la courbe représentant la suite dans un repère orthogonal montre que les termes de la suite sont de plus en plus proches du nombre 4.



On a :

$$|u_n - 4| = \frac{3}{n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

donc la suite (u_n) tend vers le nombre 4.

Propriété 28.50. *Limites de suites de référence*

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Définition 28.51.
On appelle *suite divergente* une suite qui ne converge pas.

Remarque 28.52.
Si une suite diverge alors, soit la suite a une limite égale à $+\infty$, soit la suite a une limite égale à $-\infty$, soit la suite n'a pas de limite.

Exemple 28.53.
La suite $(-1)^n$ est une suite divergente. La limite de cette suite ne peut être que 1 ou -1. Or, la suite admet presque tous ses termes dans l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right[$ et également dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$. Il est donc impossible que 1 ou -1 soient limites de la suite.

28.5.3 Limites et opérations algébriques

Propriété 28.54. *Limite d'une somme de suites*

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Remarque 28.55.
L'expression « forme ind. » (ou « forme indéterminée ») signifie que l'on ne peut pas conclure directement et une étude spécifique est nécessaire.

Propriété 28.56. *Limite d'un produit de suites*

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	0
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n) =$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Propriété 28.57. *Limite de l'inverse d'une suite*

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $u_n>0$	0 avec $u_n<0$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Exemples 28.58.

1. Soit la suite (v_n) définie par :
$$v_n = \left(\frac{4n+3}{n}\right)\left(3+\frac{5}{n^3}\right).$$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^3} = 0$ et
$$\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{5}{n^3}\right) = 3.$$
On a montré précédemment que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+3}{n} = 4.$$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4\times 3 = 12$.

2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n^3\sqrt{n} + \frac{1}{n^2} + 3$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n} = +\infty.$$
De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} + 3 = 3.$$
On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} n^3\sqrt{n} + \left(\frac{1}{n^2} + 3\right) = +\infty.$$
3. Soit la suite (z_n) définie par $z_n = \frac{1}{n^5\sqrt{n}}$. On écrit $n^5 = n^3n^2$ et on montre que $\lim_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} n^5\sqrt{n} = +\infty$. On a, d'après la propriété précédente,
$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5\sqrt{n}} = 0.$$

28.5.4 Limites et comparaison de suites

Propriété 28.59.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration. ◊ Par l'absurde, supposons qu'à partir du rang n_0, $u_n \leqslant v_n$ et que $\ell > \ell'$. Soit $r = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$, $I :=]\ell - r, \ell + r[$ et $I' =]\ell' - r, \ell' + r[$. I et I' sont bien disjoints c'est-à-dire $I \cap I' = \varnothing$.

I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_1, I' contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un rang n_2.

Soit N le maximum de n_0, n_1 et n_2 alors, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in I$ et $v_n \in I$, d'où :
$$v_2 < \ell' + r < \ell - r < u_n,$$
ce qui est absurde car, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. □

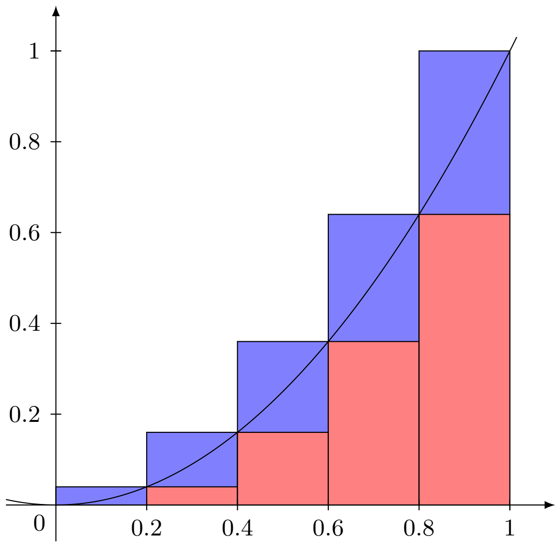
Théorème 28.60. *Théorème des gendarmes*
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite ℓ, alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

◊ *Démonstration du théorème des gendarmes.* Soit $r > 0$. A partir d'un certain rang, $\ell - r < u_n < \ell + r$. De même, pour la suite (v_n), à partir d'un certain, $\ell - r < v_n < \ell + r$. Donc, à partir d'un certain rang,
$$\ell - r < u_n \leqslant w_n \leqslant v_n < \ell + r.$$
Finalement, pour n assez grand,
$$\ell - r < w_n < \ell + r.$$
□

Exemple 28.61.
On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

et on veut calculer l'aire $\mathscr{A}$ entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre 0 et 1.



Soit (u_n) l'aire des rectangles inférieurs et (v_n) l'aire des rectangles supérieurs.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$$

et comme $u_n \leqslant A \leqslant v_n$, par le théorème des gendarmes, $\mathscr{A} = \frac{1}{3}$, ce qui correspond bien à $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$.

Propriétés 28.62.

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
   — Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   — Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant v_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 28.63.
Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 7 + \frac{\sin n}{n}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 7 - \frac{1}{n} \leqslant 7 + \frac{\sin n}{n} \leqslant 7 + \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(7 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(7 - \frac{1}{n}\right) = 7.$$

Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 7$.

28.5.5 Limites des suites arithmétiques et géométriques

Définition 28.64. *Suites arithmétiques*
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel. Le nombre r s'appelle la *raison* de la suite arithmétique.

Propriété 28.65.
Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Définition 28.66. *Suites géométriques*
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *géométrique* si, pour tout n, $u_{n+1} = q u_n$, où q est un nombre réel non nul qu'on appelle la *raison* de la suite géométrique.

Propriété 28.67.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q (q non nul) alors pour tout n, on a $u_n = u_0 q^n$.

Propriété 28.68.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
— Si $r > 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
— Si $r < 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété 28.69.
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.
— Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
— Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
— Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
— Si $q \leqslant -1$, alors la suite (u_n) est divergente.

Exemples 28.70.
1. $\lim_{n \to +\infty} (350 \times 0,95^n) = 0$. On a $0 < 0,95 < 1$ et $\lim_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.
2. $\lim_{n \to +\infty} (-3 \times 1,01^n) = -\infty$. On a $1,01 > 1$, $\lim_{n \to +\infty} 1,01^n = +\infty$. La propriété sur le produit des limites permet de conclure.

28.5.6 Déterminer la limite d'une suite

▶ **Méthode 28.71.** *Déterminer la limite d'une suite*

1. Exprimer la suite en fonction de suites dont on connaît la limite et utiliser les propriétés sur les opérations algébriques.
2. Encadrer la suite par deux suites ayant même limite.
3. Majorer l'écart, entre le terme général de la suite et la limite, par le terme général d'une suite convergent vers 0.

Exemples 28.72.

1. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \frac{9n^2 - 5n + 2}{n^2}.$$
On a :
$$u_n = \frac{9n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{2}{n^2} = 9 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}.$$
Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ convergent vers 0. On a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0.$$
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 9$.
2. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6}.$$
Pour cela, on transforme l'expression de (u_n) comme pour la recherche de la limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle :
$$u_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 - 4n + 6} = \frac{n^3 \times \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \times \left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right)} = \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}}.$$
En procédant comme dans l'exemple 1, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3}\right) = 5.$$
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{5}$.
3. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \frac{5n^2 + (-1)^n}{n^2 + 2}.$$
Comme $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, on a :
$$5n + 1 \leqslant 5n^2 + (-1)^n \leqslant 5n^2 + 1,$$
d'où par encadrement :
$$\frac{5n^2 - 1}{n^2 + 2} \leqslant u_n \leqslant \frac{5n^2 + 1}{n^2 + 2}.$$

On a :

$$\frac{5n^2+1}{n^2+2} = \frac{n^2 \times \left(5+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{5+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(5+\frac{1}{n^2}\right) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right) = 1.$$

En utilisant le quotient, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+1}{n^2+2} = 5.$$

On montre de même que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2-1}{n^2+2} = 5.$$

La suite est donc encadrée par deux suites convergentes vers le même nombre 5. Le « théorème des gendarmes » implique alors que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 5.$$

4. On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n-\sin n}{n}.$$

On a, pour tout n,

$$|u_n - 1| = \left|-\frac{\sin n}{n}\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

On en déduit que, pour tout n, $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{n}$ avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

28.5.7 Suites monotones et limites

Théorème 28.73.
1. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. ♢ Soit (u_n) une suite croissante non majorée et $a \in \mathbb{R}$. Posons $I =]a; +\infty[$. Comme (u_n) est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > a$. De plus, (u_n) est croissante, d'où :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant u_{n_0} < a.$$

I contient tous les termes de (u_n) à partir du rang n_0. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

□

Théorème 28.74.
1. Toute suite croissante majorée converge.
2. Toute suite décroissante minorée converge.

♢ *Démonstration (admise en TS).* Soit (u_n) une suite réelle, croissante et majorée. On considère l'ensemble $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme (u_n) est majorée, E l'est également. De plus, E est non vide. Or, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. Soit $\alpha = \sup E$.

Montrons que (u_n) converge vers α. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \alpha.$$

Comme (u_n) est croissante,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \alpha.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

□

28.6 Compléments

28.6.1 Suites adjacentes

Résultats sur les suites adjacentes

Définition 28.75.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes :
1. (u_n) est croissante ;
2. (v_n) est décroissante ;
3. $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème 28.76. *Théorème des suites adjacentes*
Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. ♢ Dans un premier temps, montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Pour cela, posons $w_n = v_n - u_n$.

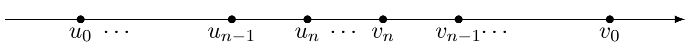
$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) \\ &= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0 \end{aligned}$$

car
- (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
- (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$

donc (w_n) est décroissante vers 0. De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant u_n.$$

Les termes des suites (u_n) et (v_n) sont donc rangés comme indiqué sur la figure ci-dessous :



La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée par v_0. Le théorème des suites croissantes majorées permet de conclure que la suite (u_n) converge vers une limite λ.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. On peut conclure de même que la suite (v_n) converge vers une limite λ'.

Or

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$. □

Exemple 28.77.
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies de la manière suivante :

$$u_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^n}, \quad v_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)+1}{10^n}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)}{10^{n+1}} - \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^n} = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right) - 10\mathrm{E}\left(10^n x\right)}{10^{n+1}}.$$

Or, $\mathrm{E}\left(10^n x\right) \leqslant 10^n x$ donc $10\mathrm{E}\left(10^n x\right) \leqslant 10^{n+1}x$. Comme $\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1}x$, on en déduit que :

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right) \geqslant 10\mathrm{E}\left(10^n x\right).$$

Ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $(u_n)_n$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)+1}{10^{n+1}} - \frac{\mathrm{E}\left(10^n x\right)+1}{10^n} = \frac{\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)+1-10(\mathrm{E}\left(10^n x\right)+1)}{10^{n+1}}.$$

Or, $10^n x < \mathrm{E}\left(10^n x\right)+1$ donc $10^{n+1}x < 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right)+1)$. Comme $\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1}x$, on a :

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)+1 \leqslant 10(\mathrm{E}\left(10^n x\right)+1)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{E}\left(10^{n+1}x\right)+1-10(\mathrm{E}\left(10^n x\right)+1) \leqslant 0$$

ainsi, $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.

On a : $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

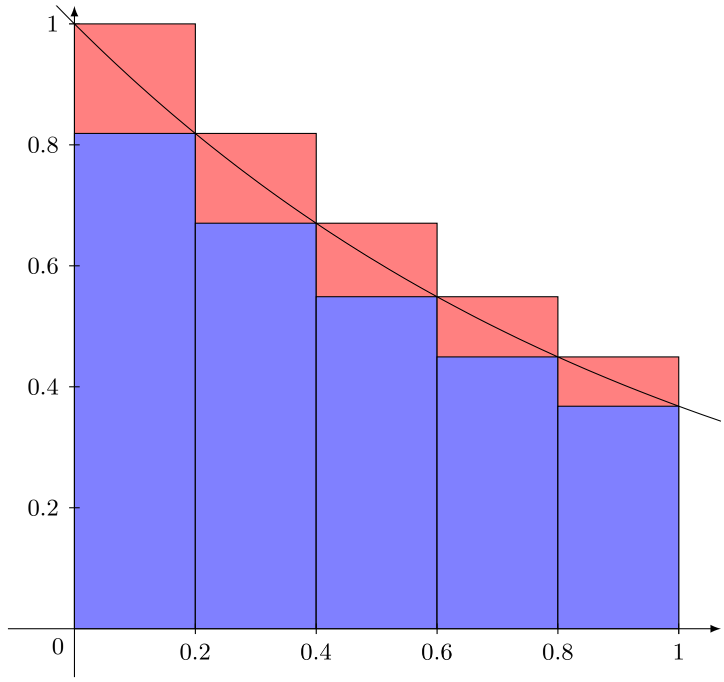
Finalement, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Nous venons de démontrer que tout nombre réel x est limite d'une suite de nombres rationnels. Il s'agit de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Aire sous la courbe

Soit f une fonction continue ou en escalier, positive et monotone sur l'intervalle $I = [a,b]$ et $\mathscr{A}$ désignant l'« aire sous la courbe ». La méthode des rectangles, par exemple, permet d'encadrer $\mathscr{A}$.

On se place dans le cas où f est décroissante sur $I = [0,1]$. On partage I en N intervalle de même amplitude $\frac{1}{N}$ alors :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$



Si à tout entier naturel non nul n, on associe un partage régulier de $I = [0;1]$ défini par son pas p_n (on a alors $N = \dfrac{1}{p_n}$), en posant $a_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=N} f\left(\frac{k}{N}\right)$ et $b_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$, on définit deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant b_n$.

Question : Est-ce que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont adjacentes ?

Si[1] $p_n = \frac{1}{n}$, on ne peut pas conclure à la monotonie des suites (a_n) et (b_n) par des considérations d'aire car les $n+1$ rectangles obtenus à l'étape $n+1$ sont sans lien direct avec les n rectangles obtenus à l'étape n et les suites (a_n) et (b_n) ne sont pas nécessairement adjacentes.

Contre exemple : Soit f la fonction en escalier définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/2,1] \end{cases}$$

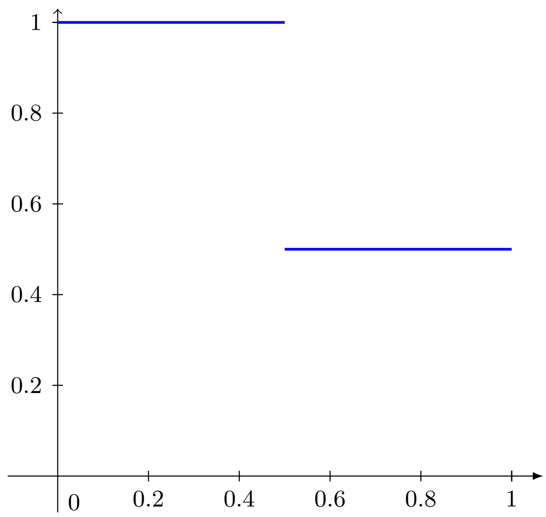
Alors, on montre que :

$$a_2 = \mathscr{A} \quad \text{et} \quad a_3 < \mathscr{A}$$

et plus généralement, pour tout entier naturel non nul k,

$$a_{2k} = \mathscr{A} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \mathscr{A}.$$

La suite (a_n) n'est donc pas croissante.



1. À l'étape n, on partage l'intervalle $[0;1]$ en $N = n$ intervalles de même amplitude.

Dans ce cas où $p_n = \frac{1}{n}$, que les suites (a_n) et (b_n) soient adjacentes ou ne le soient pas, les justifications ne sont en général pas simples, on peut toutefois trouver quelques fonctions telles que la fonction carrée ou la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ pour lesquelles on obtient des suites dont on peut démontrer qu'elles sont bien adjacentes.

Si [2] $p_n = \frac{1}{2^n}$ alors, dans le cas où f est monotone sur I, des considérations d'aire permettent d'établir la monotonie des suites (a_n) et (b_n) et de montrer qu'elles sont bien adjacentes.

Cependant si l'on cherche à exhiber un exemple correspondant à ce cas, les expressions de (a_n) et (b_n) deviennent vite très compliquées étant donné que $N = 2^n$.

28.6.2 Suites définies par récurrence

Définition 28.78. *Suite définie par une relation de récurrence*

Une suite définie par récurrence est une suite que l'on connaît par son terme initial u_0 ou u_1 et une relation qui lie un terme quelconque en fonction du précédent ou des précédents.

Il existe différents types de suite définie par récurrence :

1. Suite définie par une relation de récurrence du type
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
2. Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$.
3. Suites définies par une relation de la forme :
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
et leurs deux premiers termes.
4. Suite homographique : $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$.
5. ...

Si la suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et par :
$$u_{n+1} = f(u_n), \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0,$$
(avec $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), il n'y a pas de formule permettant de calculer directement u_n en fonction de n, mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n. Ainsi, en connaissant le premier terme u_0, on peut calculer le terme suivant u_1, puis connaissant u_1, on peut calculer u_2.

Exemples 28.79.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 \times u_n$. On a alors :
$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \times u_0 = 3 \times 2 = 6 \\ u_2 &= 3 \times u_1 = 3 \times 6 = 18 \\ u_3 &= 3 \times u_2 = 3 \times 18 = 52. \end{aligned}$$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{4 + u_n}$. On a alors :
$$\begin{aligned} u_1 &= 2\sqrt{4 + u_0} = 2\sqrt{4 - 1{,}5} \simeq 3{,}16 \\ u_2 &= 2\sqrt{4 + u_1} \simeq 2\sqrt{4 + 3{,}16} \simeq 5,35. \end{aligned}$$

2. À chaque étape on multiplie le nombre d'intervalles du partage par 2 et $N = 2^n$.

Dans un repère orthonormé, on trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$. On part de u_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne u_1. Pour déterminer $u_2 = f(u_1)$, il nous faut rabattre u_1 sur l'axe des abscisses, pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$. Dès lors, u_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse u_1.

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant u_2 sur l'axe des abscisses, u_3 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisses u_2…

Exemple 28.80. *Suite de Héron*
Soit la suite u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0;+\infty[\\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on montre que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geqslant 0$$

donc, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - u_n^2}{u_n}\right) \leqslant 0 \quad \text{car } \forall n \geqslant 1,\ u_n^2 \geqslant 2.$$

d'où (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

(u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, par conséquent elle est convergente mais on ne peut conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Pour cela, on pose :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \end{array}$$

f est dérivable sur $I =]0;+\infty[$ et :

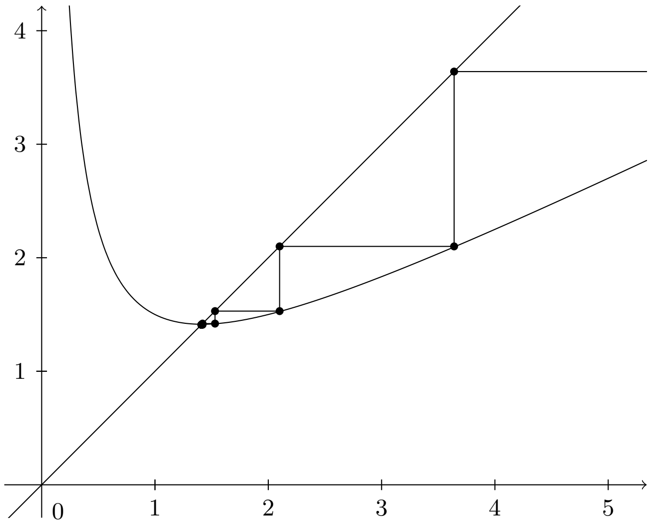
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

f est $\frac{1}{2}$-contractante. Par le théorème du point fixe, (u_n) converge vers $\sqrt{2}$, qui est l'unique point fixe de f dans I.

On se sert de la suite de Héron pour approximer le nombre irrationnel $\sqrt{2}$



Le tableau suivant donne des approximations de $\sqrt{2}$ à partir des premiers termes de (u_n). On remarque pour avoir une bonne approximation à 10^{-4}, on doit choisir u_6 (ou les termes suivants).

n	u_n	erreur
0	$17,807113$	$16,392899$
1	$8,959714$	$7,545500$
2	$4,591467$	$3,177254$
3	$2,513291$	$1,099315$
4	$1,654115$	$0,240397$
5	$1,431677$	$0,017463$
6	$1,414320$	$0,000106$
7	$1,414213$	10^{-8}

28.6.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 28.81. *Suite arithmético-géométriques*

On dit qu'une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple 28.82.
La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et de premier terme $u_0 = 1$ est arithmético-géométrique.

Remarque 28.83.
Une suite arithmético-géométrique n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

Exemple 28.84.
Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie, pour tout $n \geqslant 0$, par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et de premier terme $u_0 = 5$. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \geqslant 0$, par $v_n = u_n - 3$ est une suite géométrique.

$\Diamond$ On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \times 5 - 3 = 7 \\ u_2 &= 2 \times 7 - 3 = 11 \\ u_3 &= 2 \times 11 - 3 = 19. \end{aligned}$$

Soit la suite (v_n) définie, pour tout $n \geqslant 0$, par : $v_n = u_n - 3$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$. On peut donc en conclure que, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n.$$

Ainsi, $u_n = v_n + 3$ et on peut en déduire que $u_n = 2 \times 2^n + 3$, pour tout n.

En résumé, le schéma de l'étude d'une suite arithmético-géométrique est toujours le même :

▶ **Méthode 28.85.** *Étude d'une suite arithmético-géométrique*

1. Introduction d'une suite auxiliaire (v_n) définie à l'aide de la suite (u_n).
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire une formule exprimant v_n en fonction de n.
4. À partir de la relation entre (v_n) et (u_n), en déduire une formule générale exprimant u_n en fonction de n.

Pour fabriquer cette suite auxiliaire, voici comment orn procède. On suppose qu'on doit étudier la suite arithmético-géométrique (u_n) de premier terme u_0 donné et défini, pour tout $n \geqslant 0$, par : $u_{n+1} = au_n + b$ (on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$). On résout l'équation $x = ax + b$ et on note ℓ la solution de cette équation. On a alors $\ell = a\ell + b$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$$

et en soustrayant, $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on obtient ainsi que (v_n) est une suite géométrique.

28.6.4 Méthode de dichotomie

Proposition 28.86.
Soit f définie et continue sur $[a; b]$ et telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors f admet au moins une racine dans l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration. ◊ On utilise le principe de dichotomie : on définit une suite (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & \text{si } f(u_n)f(\frac{u_n+v_n}{2}) \leqslant 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n & \text{si } f(u_n)f(\frac{u_n+v_n}{2}) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Par construction, les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ce sont donc des suites adjacentes, qui convergent donc vers une limite dans $[a, b]$ que l'on note ℓ.

La continuité de f nous assure que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} f(v_n) = f(\ell)$, donc en passant à la limite dans la relation $f(u_n)f(v_n) \leqslant 0$, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n)f(v_n) \leqslant 0 \Rightarrow (f(\ell))^2 \leqslant 0 \Rightarrow f(\ell) = 0.$$

□

Exemple 28.87.
En utilisant cette méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à l'aide de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie sur $[1; 2]$.

Démonstration. ◊ On peut créer la fonction suivante sur Xcas :

```
dicho(f,a,b,n):={
        local u,v,t,g;
        u := a;
        v := b;
        g := f;
        tantque v-u>10^(-n-1) faire
                t := (u+v)/2;
                si g(u)*g(t) < 0
                        alors v := t
                        sinon u := t
                fsi
        ftantque
return evalf(u);}:;
```

La fonction prend comme argument :

- la fonction considérée,
- les bornes de l'intervalle de définition,
- la précision souhaitée

La fonction crée deux suites (u_n) et (v_n) applique le principe de la dichotomie à condition que $v_n - u_n < \frac{1}{10^{n-1}}$.

On utilise la fonction avec les données de l'énoncé :

$$f : x \mapsto x^2 - 2 \quad \text{sur } [1, 2]$$

```
f := x -> x^2 - 2
        (x) -> x^2 - 2
dicho(x -> x^2-2,1,2,1)
        1.4140625
dicho(x -> x^2-2,1,2,2)
        1.4140625
dicho(x -> x^2-2,1,2,3)
        1.41418457031
dicho(x -> x^2-2,1,2,4)
        1.4142074585
dicho(x -> x^2-2,1,2,5)
        1.41421318054
```

□

28.6.5 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 28.88.
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

1. $\forall n \geqslant 1$, $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$,
2. il n'existe pas $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $a_n = 9$,
3. $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x \leqslant a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration. $\diamondsuit$ Soit u_n la valeur décimale approchée par défaut à x à 10^{-n} près. La double inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité :

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Soit $m = u_n 10^n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$u_n = \frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \Leftrightarrow m = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}10 + a_n.$$

Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans $\mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^n$, par unicité de l'écriture en base 10.

On montre que les coefficients a_i sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont les mêmes au rang n et $n+1$. Supposons qu'on ait au rang $n+1$ la double inégalité :

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Or, puisque $b_{n+1} \leqslant 9$, on aura nécessairement $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^n}$, et notre double inégalité devient :

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leqslant x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

L'unicité de la solution $(a_0, \dots, a_n)$ de la relation du (iii) au rang n nous permet d'affirmer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $a_i = b_i$.

On suppose enfin qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$ vérifie $a_n = 9$. Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissance de 10, on est ramené à étudier le cas particulier $0,99\overline{9}\dots$. Or :

$$0,99\overline{9}\dots = \sum_{n \geqslant 1} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1$$

et l'inégalité (iii) n'est plus vraie pour tout n alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. $\square$

Définition 28.89.

Dans ce cas, par passage à la limite :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

et l'on dit que c'est le *développement décimal illimité propre* de et on note de manière plus commode $x = a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$.

LEÇON

29

Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Préambule

Niveau : première « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Spécialité » et « Mathématiques Complémentaire »

Prérequis : théorie sur les fonctions (représentation graphique, étude de fonctions), fonctions logarithmes, principe de récurrence, utilisation de GeoGebra, résolution d'équations du second degré, nombres complexes.

Références :

[1] S. Pasquet, *Ainsi de suite.* 2018. [url]

[2] *Manuel Sesamaths Terminale S.* Magnard 2016. [url]

[3] T. Vedel, *Les suites arithmético-géométriques.* [url].

[4] Unknown, *Des outils pour les suites.* [url].

[5] A. Creusot, *Convergence de suites.* Université de Paris Diderot. [url]

[6] M. Mansuy, *Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.* Lycée Louis Pergaud, Besançon. [url]

[7] C. Parfenoff, *Étude des suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.* [url].

[8] D. Vergès, *Sujets de BAC.* [url].

[9] J.-P. Dedieu & J.-C. Yakoubsohn, *Suites numériques : une introduction.* MIP, Département de Mathématiques, Université Paul Sabatier,Toulouse. [url]

[10] Contributeurs de Wikipédia, *Suites récurrente linéaire.* Wikipédia. [url]

[11] S. Junca, *Suites récurrentes homographiques.* Université de Nice Sophia Antipolis. [url]

[12] A. Samier & C. Rasson, *Suites*, Leçon de Maths, S2. Master 1 Ens Math, 2010-2011.

[13] S. Duchet, *Étude de suites définies par différents types de récurrence.* [url].

Introduction

Le titre de la leçon est : « Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Applications » donc nous allons nous borner à l'étude de ce type de suites récurrentes. Mais il faut savoir qu'il en existe d'autres types :

Définition 29.1. *Suites linéaires à coefficients constants*
Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (à valeurs dans $\mathbb{K}$) *linéaire d'ordre p* si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}, \quad (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p.$$

On note $\mathscr{L}_p$ l'ensemble de ces suites.

Une étude plus précise de ces suites est donnée dans l'ouvrage « *Ainsi de Suite* » de S. Pasquet.

Et plus généralement, on peut définir des suites récurrentes non linéaires d'ordre p. C'est le cas des suites homographiques [1] qui rentreront dans le cadre de notre étude (f sera donc une fonction dite *homographique*) ou de suites imbriqués du type :

$$\begin{cases} a_0 \geqslant 0, b_0 \geqslant 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

.

29.1 Définitions et propriétés

29.1.1 Sujet d'étude

Nous étudierons les suites récurrentes définies de la manière suivante :

Définition 29.2. *Suites définies par récurrence*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dans cette partie, il ne sera pas question de développer la théorie d'étude de monotonie et de convergence de ce type de suites car elle n'est pas au programme des classes de lycée. Nous donnerons quelques résultats. Mais avant, une remarque très importante pour le calcul des termes d'une suite numérique.

Remarque 29.3.
On ne peut pas calculer facilement les termes u_n quand n grand quand la suite (u_n) est donnée par sa formule par récurrence. En effet, on a besoin des termes précédents pour calculer le terme présent. Ainsi, pour calculer u_{50}, il nous faudrait les termes u_{49}, u_{48}, etc.

Il est donc préférable de trouver la forme explicite (du type $u_n = f(n)$) pour calculer plus facilement les termes de plus haut rang même si des fois, cette recherche peut s'avérer peu productif.

29.1.2 Étude de monotonie

Définition 29.4. *Intervalle stable*
On dit que l'intervalle J est *stable* par f si $f(J) \subset J$.

1. suite récurrente non linéaire d'ordre 1

Ainsi, avant de commencer l'étude de la suite (u_n), il faut faire l'étude de la fonction f (dresser son tableau de variation et tracer son graphe).

Propriété 29.5.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$ un intervalle stable par f. Si $u_0 \in J$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration se fait par récurrence.

Propriété 29.6. *Monotonie de la suite* (u_n)
Si f est monotone sur I :

— si f est croissante alors (u_n) est monotone. Le sens de variations est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

— Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Un critère donne le sens de variations de (u_n) en fonction de la caractérisation de la fonction f.

Propriété 29.7.
Si u_n appartient à l'intervalle I pour tout n, alors :

— si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$ alors (u_n) est croissante ;

— si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant x$ alors (u_n) est décroissante.

29.1.3 Étude de convergence

Théorème 29.8.
Si f est continue sur un intervalle fermé I et que (u_n) converge vers un réel ℓ, alors la limite est nécessairement un point fixe de f, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.

La démonstration de ce théorème est très important pour les exercices traitant de l'étude d'une telle suite.

29.2 Représentation graphique. Utilisation des TICE

On donne une méthode pour représenter graphiquement les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

► **Méthode 29.9.** *Représentation graphique*

Pour tracer la représentation graphique d'une suite (u_n) définie par une formule de récurrence (où $u_{n+1} = f(u_n)$), on procède ainsi :

— construire la courbe représentant la fonction f ;

— construire la droite d'équation $y = x$;

— placer u_0 sur l'axe des abscisses.

— construire son image u_1 ;

— la reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$;

— construire de la même façon u_2 et u_3…

On va appliquer la méthode sur le logiciel GeoGebra. On donnera des instructions claires pour tracer la représentation graphique d'une suite récurrente pour toute fonction f continue sur un intervalle I.

Exemple 29.10.
On considère la suite (u_n) définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{6}{10} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

La suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x^2$ que l'on peut définir sur l'intervalle $I = [0; 1]$. On se place dans le plan munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On trace d'abord la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$: c'est un morceau de parabole.

```
f = Fonction(x^2,0,1)
```

2. On trace ensuite la première bissectrice du repère, c'est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

```
g = Fonction(x,0,1)
```

On construit les n (n peut être un nombre entier dont la valeur maximale peut être choisi [2] grâce à un curseur) itérations de la fonction f à partir d'un nombre a (a est un nombre compris entre 0 et 1 que l'on peut choisir dans un curseur).

```
n = Curseur(0,30,1)
a = Curseur(0,1,0.01)
Termes = ItérationListe[f,a,n]
```

Pour notre exemple :

```
>>> Termes = {0.6,0.36,0.1296,0.01679616}
```

On définit les points (u_i, u_i) de la droite $\mathscr{D}$.

```
Pointsx=Séquence[(Element[Termes,i],Element[Termes,i]),i,1,n]
```

puis les points (u_i, u_{i+1})

```
Pointsf = Séquence[(Element[Termes,i],Element[Termes,i+1]),i,1,n]
```

On trace les segments verticaux :

```
SegmentsV = Séquence[Segment[Element(Pointsx,i),Element(Pointsf,i)],i,1,n]
```

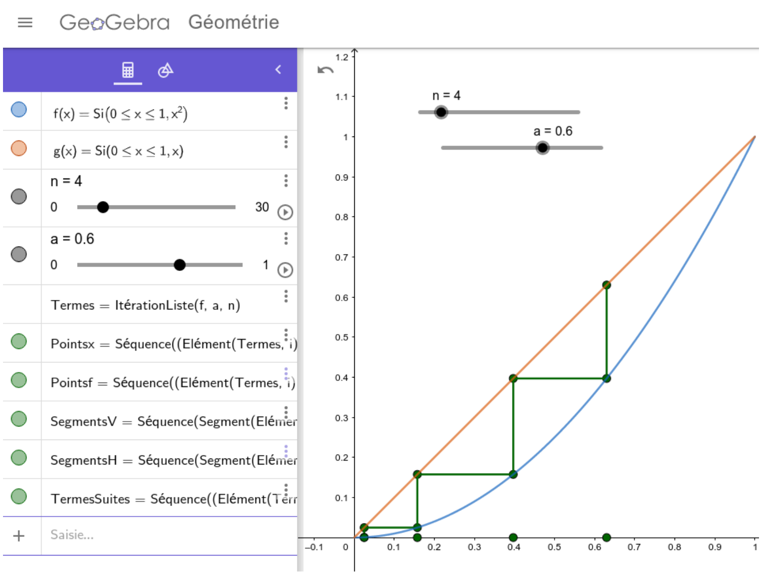
et enfin, les segments horizontaux :

```
SegmentsH = Séquence[Segment[Element(Pointsf,i),Element(Pointsx,i+1)],i,1,n]
```

On peut obtenir les termes de la suite sur l'axe des abscisses grâce à la commande suivante :

```
TermesSuite=Séquence((Elément(Termes,i),0),i,1,n)
```

Pour notre exemple, on obtient la capture d'écran suivant (voir page suivante) :



Remarque 29.11.
La manipulation fonctionne sur « GeoGebra Géométrie » et non sur la nouvelle version (version web) de « GeoGebra Calculatrice Graphique ».

Pour finir cette partie, on peut donner une synthèse de l'étude de suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

▶ Méthode 29.12.
Lors de l'étude de suites récurrentes, il est intéressant de déterminer :

— les points fixes de f s'ils existent ;

— les intervalles stables bornés à droite (comme par exemple $]-\infty; M])$) ou à gauche (comme par exemple $[N; +\infty[$) ;

— les intervalles stables par f sur lesquels f est strictement croissante ou strictement décroissante.

29.3 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ dans une démonstration par récurrence

Dans cette partie, on va montrer comment les raisonnements par récurrence nous permettent de démontrer quelques propriétés sur certaines suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En particulier, grâce à ces démonstrations, on peut montrer qu'une suite définie par récurrence est majorée (ou minorée, ou bornée). Rappelons ce qu'est le principe de récurrence.

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition 29.13.
On dit que la propriété P est *héréditaire* à partir du rang n_0 lorsque, si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, la véracité de la propriété $P(n)$ entraîne la véracité de la propriété $P(n+1)$.

Théorème 29.14.
Si la propriété $P(n_0)$ est vraie (*initialisation*) et si P est héréditaire à partir du rang n_0 alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

2. J'ai choisi la valeur de 30 mais vous pouvez changer cette valeur selon vos souhaits !

Exemple 29.15.
Rédaction d'une démonstration par récurrence

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{2} - 1$.

On veut démontrer, par récurrence, que la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2, c'est-à-dire la propriété $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -2$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Donc $u_0 \geqslant u_1 \geqslant -2$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité On suppose que pour un entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie : $u_n \geqslant u_{n+1}$ c'est l'hypothèse de récurrence. On cherche à prouver qu'alors, $P(n+1)$ est vraie. Or f est une fonction affine de coefficient positif donc elle est croissante. Donc : $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(-2)$, soit $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -2$. La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

On a donc prouvé que la propriété $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0.

Conclusion La propriété $P(0)$ est vraie, et la propriété $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0. Donc par récurrence, on a prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -2$ ».

Une démonstration classique par récurrence (la toute première) est de montrer la propriété suivante :

Propriété 29.16.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On pourra laisser la démonstration en exercice.

On donne une autre démonstration par récurrence permettant de montrer qu'une suite définie par récurrence est minorée par 1.

▶ **Exercice 29.17.** *Extrait BAC S Asie 2013*
Partie A

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = \frac{1 + 3w_n}{3 + w_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n > 1$.
2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{(1 - w_n)(1 + w_n)}{3 + w_n}.$$

   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (w_n). En déduire que la suite (w_n) converge.

Solution. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = \frac{1 + 3w_n}{3 + w_n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la propriété $P(n)$: « $w_n > 1$ ». On démontrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce au principe de récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$:

$$w_0 = 2 > 1.$$

La propriété $P(0)$ est vraie, la propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0.

Hérédité : On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $w_n > 1$ ($\mathscr{H}_R$). On démontre que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence ($\mathscr{H}_R$), on a : $w_n > 1$ donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $w_n = 1 + \varepsilon$. On a, d'une part :

$$1 + 3w_n = 1 + 3(1+\varepsilon) = 3\varepsilon + 4$$

et d'autre part :

$$3 + w_n = 3 + (1+\varepsilon) = 4 + \varepsilon.$$

Or $\varepsilon > 0$ donc $3\varepsilon > \varepsilon$ et par suite, $1 + 3(1+\varepsilon) > 3 + 1 + \varepsilon$. Donc :

$$w_{n+1} = \frac{1+3w_n}{3+w_n} > 1.$$

La propriété $P(n+1)$ est vraie. La propriété P est héréditaire à partir du rang 0.

Conclusion : La propriété $P(n)$ a été initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire à partir du rang $n = 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire « $w_n > 1$ ».

Cela veut dire que la suite (w_n) est minorée par 1.

2. (a) On a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1+3w_n}{3+w_n} - \frac{w_n(3+w_n)}{3+w_n} = \frac{1+3w_n-3w_n-w_n^2}{3+w_n} = \frac{1-w_n^2}{3+w_n}.$$

Or, en appliquant une identité remarquable, on trouve :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}.$$

3. On a démontré que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $w_n > 0$. Ainsi $w_n - 1 > 0$ et $1 - w_n < 0$ (opposé). Le numérateur de $w_{n+1} - w_n$ est négatif alors que le dénominateur de $w_{n+1} - w_n$ est positive. Ainsi, $w_{n+1} - w_n$ est négatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite (w_n) est décroissante.
La suite (w_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

□

Autre idée de démonstration par récurrence : inégalité de Bernoulli.

29.4 Suites arithmétiques et suites géométriques

Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont à la base des suites définies par récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Faisons un rapide tour d'horizon de la théorie.

29.4.1 Suites arithmétiques

Définition 29.18.

Soit r un nombre réel. On dit que (u_n) est une suite arithmétique si $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On dira alors que la suite arithmétique (u_n) a pour raison r et pour terme initiale u_0.

Une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x + r$ (c'est une fonction affine de coefficient directeur 1). Littéralement, pour passer d'un terme au suivant, il faut lui ajouter le nombre réel r.

Exemple 29.19.
Soit la suite (u_n) définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ u_2 &= u_1 + 2 = 5 + 2 = 7 \\ u_3 &= u_2 + 2 = 7 + 2 = 9 \\ &\dots \end{aligned}$$

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Pour calculer des termes de plus haut rang, on doit se souvenir de la remarque 29.3. Les suites arithmétiques ont une forme explicite assez simple à trouver. On peut procéder de proche en proche.

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r \\ &\dots \end{aligned}$$

et ainsi :

Propriété 29.20.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

La démonstration de cette propriété peut se faire par récurrence.

Exemple 29.21.
On reprend la suite (u_n) définie dans l'exemple précédent. D'après la propriété sur la forme explicite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3 + 2n.$$

On peut ainsi facilement calculer u_{50} :

$$u_{50} = 3 + 2 \times 50 = 103.$$

On peut aussi énoncé une propriété plus générale sur la forme explicite de la suite arithmétique.

Propriété 29.22.
Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Démonstration. ◊ Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la propriété précédente, on a : $u_p = u_0 + pr$. Ainsi, par différence :

$$u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = u_0 + nr - pr = u_0 + (n - p)r.$$

□

On peut aussi additionner des termes successifs d'une suite arithmétique. C'était un des premiers problèmes que le mathématicien talentueux Karl Frederich Gauss (1777-1855) a eu affaire dans sa plus tendre jeunesse : la somme des n premiers entiers (ici $n = 100$).

$$\begin{array}{cllllll} & 1+ & 2+ & 3+ & \ldots & 99+ & 100 \\ + & 100+ & 99+ & 98+ & \ldots & 2+ & 1 \\ \hline = & 101+ & 101+ & 101+ & \ldots & 101+ & 101 \end{array}$$

Dans la somme, il y a 100 termes de 101 donc 101×100 et comme on compte deux fois la somme S, on a :

$$S = \frac{101 \times 100}{2} = 50500.$$

On a ainsi la propriété suivante :

Propriété 29.23. *Somme des n premiers entiers consécutifs*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut s'inspirer de la méthode de Gauss pour rédiger une démonstration de cette propriété.

Pour une suite arithmétique (u_n), on peut l'écrire sous la forme explicite $u_n = u_0 + nr$ et par suite :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} = u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \cdots + u_0 + nr.$$

En regroupant les termes u_0 (il y en a $n+1$) et en factorisant par r :

$$S = (n+1) + (1 + 2 + \cdots + n)r.$$

On peut donc utiliser la propriété de somme des n premiers entiers consécutifs pour en déduire la somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

Propriété 29.24.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\left(u_0 + \frac{n}{2}r\right) \quad (*).$$

Si on multiplie par 2, l'égalité $(*)$, on obtient :

$$2(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = (n+1)(2u_0 + nr)$$

Or : $u_0 + nr = u_n$ et ainsi :

Propriété 29.25.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2}(n+1).$$

29.4.2 Suites géométriques

On a vu, pour une suite arithmétique, que pour passer d'un terme au suivant, il faut lui ajouter le nombre réel r. Il existe un autre de type de suites (définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$) où ce n'est pas une addition que l'on applique au terme pour passer au suivant mais une multiplication.

Définition 29.26.
Soit q un nombre réel. On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 si (u_n) est définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = qu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}.$$

Ainsi, pour passer d'un terme au suivant, il faut lui multiplier le nombre réel q. Une suite géométrique est une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto qx$ (fonction linéaire de coefficient directeur q).

Exemple 29.27.
Soit (u_n) la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier $u_0 = 3$.

Comme pour les suites arithmétiques, on peut facilement déduire la forme explicite de proche en proche.

Propriété 29.28.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

et de façon général, pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

On peut encore faire une démonstration par récurrence pour montrer que la propriété est vraie.

Pour les suites géométriques, on a aussi une formule simple à retenir pour la somme des premiers termes.

Propriété 29.29. *Somme des premiers termes*
Soit (u_n) une suite géométrique de raison non nulle q. Alors :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} (n+1)u_0 \text{ si } q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} u_0 \text{ si } q \neq 1 \end{cases}.$$

Démonstration. ◊ On traite le cas où $q \neq 1$. On pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

D'après la propriété sur la formule explicite, on a :

$$S_n = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^n u_0.$$

Si on multiplie par q dans les deux membres de l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} qS_n &= qu_0 + q^2u_0 + q^3u_0 + \cdots + q^{n+1}u_0 \\ &= S_n - u_0 + q^{n+1}u_n \\ &= S_n + (q^{n+1} - 1)u_0. \end{aligned}$$

D'où :

$$qS_n - S_n = q^{n+1} - 1(u_0) \Leftrightarrow S_n(q-1) = (q^{n+1} - 1)u_0 \Leftrightarrow S_n = \frac{(q^{n-1} - 1)u_0}{q - 1}.$$

□

On peut aussi s'intéresser à la limite des suites géométriques. On peut se restreindre au cas où $q > 0$ (dans le programme de Terminale).

Propriété 29.30.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_h) est :
  - croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$
  - constante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ si $u_0 = 0$
  - décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 < 0$
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est :
  - décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ si $u_0 > 0$
  - constante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ si $u_0 = 0$
  - croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ si $u_0 < 0$

Pour l'étude de la limite de la suite (u_n), on peut se restreindre à une raison comprise entre -1 et 1, la suite convergera vers 0.

29.5 Suites arithmético-géométriques. Recherche de suites auxiliaires

29.5.1 Définition

Définition 29.31.
Soit q et r deux nombres réels. On dit que (u_n) est une suite *arithmético-géométrique* si $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$.

Ici, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie celui-ci par q (comme pour une suite géométrique) puis on ajoute un nombre r (comme pour une suite arithmétique).

Remarque 29.32.

- Si $q = 1$ alors la suite arithmético-géométrique (u_n) devient une suite arithmétique de raison r.
- Si $r = 0$ alors la suite arithmético-géométrique (u_n) devient une suite géométrique de raison q.
- Une suite arithmético-géométrique n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique (dans tous les autres cas).

Comme pour les suites arithmétiques et géométriques, on peut donner la forme explicite de la suite arithmético-géométrique en fonction de p et q.

Propriété 29.33.
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = qu_n + r.$$

On exclut le cas où la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou constante (c'est-à-dire $q \neq 0$). On a alors :

$$u_n = q^n u_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} r.$$

Cette propriété peut se démontrer par récurrence.

La recherche de l'écriture explicite est moins aisée que dans le cas arithmétique et géométrique. On pourra passer par une suite auxiliaire géométrique (c'est une autre démonstration de la propriété précédente).

29.5.2 Étude d'une suite auxiliaire

Propriété 29.34.
Pour toute suite arithmético-géométrique (u_n), on peut trouver un nombre b tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - b$ soit géométrique de raison q.

Démonstration. ♢

1. On recherche le point fixe de la suite (u_n) en résolvant l'équation :
$$x = qx + r \Leftrightarrow x - qx = r \Leftrightarrow (1-q)x = r \Leftrightarrow x = \frac{r}{1-q}.$$
Ainsi, on pose : $b = \frac{r}{1-q}$.
2. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - b$ est géométrique. Montrons-le. On a, pour tout entier n :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - b = qu_n + r - b.$$
b vérifie l'équation $b = qb + r$ donc :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= qu_n + r - qb - r = q(u_n) - qb \\ &= q(u_n - b) = qv_n. \end{aligned}$$

□

Pour finir l'autre démonstration de la propriété 29.33, on exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

On a :
$$v_0 = u_0 - b$$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (u_0 - b)q^n$. De plus, $u_n = v_n + b$ ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = (u_0 - b)q^n + b = q^n u_0 - bq^n + b = q^n u_0 - \frac{q^n - 1}{1-q} r = q^n u_0 + \frac{q^n - 1}{q-1} r.$$

29.5.3 Un exemple d'étude de suites arithmético-géométrique

Ainsi, on peut former un plan d'étude sur les suites arithmético-géométrique.

▶ **Méthode 29.35.** *Exercice-type*
Soit une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = qu_n + r$ avec u_0 donné.
- On définit une suite (v_n) définie par $v_n = u_n + b$.
- On démontre que (v_n) est géométrique en exprimant v_{n+1} en fonction de v_n.
- On détermine la raison et le premier terme.
- On écrit v_n en fonction de n et de v_0 en utilisant la formule $v_n = v_0 q^n$.
- On écrit u_n en fonction de v_n puis en fonction de n (ici $u_n = v_n - b = v_0 q^n - b$).
- On trouve ainsi la limite de u_n (si $0 < q < 1$ la limite est $-b$, si $q > 1$ la limite est infinie).

▶ **Exercice 29.36.** *BAC ES Amérique du Nord 2019*
Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :
- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela, il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi, $u_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que
   $$u_n = -140 \times 0,9^n + 420.$$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. La commun, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.
   On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :
```
N <- 0
U <- 280
Tant que .............
N <- N+1
U <- ..............
Fin Tant que
```
   (a) Recopier et compléter l'algorithme.
   (b) Que contient la variable `N` à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   (c) En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures.
5. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
   $$-140 \times 0,9^n + 420 > 380$$
   et retrouver le résultat précédent.

Solution. 1. Le nombre de voitures louées avec ce système de location au mois de février 2019 correspond à u_1 :
$$u_1 = 0,9u_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 294.$$
Il y a eu donc 294 voitures louées au mois de février 2019.

2. (a) Pour tout n entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 420$. Montrons que la suite (v_n) est géométrique :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 420 = 0,9u_n + 42 - 420 = 0,9u_n - 378 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{378}{0,9}\right) = 0,9\,(u_n - 420) = 0,9v_n. \end{aligned}$$
La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$.

(b) On peut donc exprimer v_n en fonction de n :
$$v_n = v_0 q^n = -140 \times 0,9^n.$$
On sait que :
$$v_n = u_n - 420 \Leftrightarrow u_n = v_n + 420$$
d'où :
$$u_n = v_n + 420 \Leftrightarrow u_n = -140 \times 0,9^n + 420.$$

3. Comme $0 < 0,9 < 1$, la limite $\lim_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} -140 \times 0,9^n = 0$. Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -140 \times 0,9^n + 420 = 420.$$

Sur le long terme, le nombre de voitures louées au cours d'un mois s'approchera de 420. Comme le parc automobile est constitué que de 380 voitures, il n'y aura pas assez de voitures pour les demandes de locations.

4. (a)
```
N <- 0
U <- 280
Tant que U<380
N <- N+1
U <- 0.9*U+42
Fin Tant que
```
   (b) La variable `N` contient le nombre de mois minimum au bout duquel le nombre de demandes de locations dépasse le nombre de voitures présents dans le parc automobile de la commune. D'après la calculatrice, on trouve $N = 12$.

   (c) En janvier 2020, il faudra que la commun augmente le nombre de voitures dans son parc.

5. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} -140 \times 0,9^n + 420 > 380 &\Leftrightarrow -140 \times 0,9^n > -40 \\ &\Leftrightarrow 0,9^n < \frac{40}{140} \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)} \Leftrightarrow n > 11,89. \end{aligned}$$

Ainsi, au bout du douzième mois, c'est-à-dire janvier 2020, il faudra que la commune augmente le nombre de voitures dans son parc.

□

Note : les changements de signes dans l'inéquation se justifient car on divise par des termes négatifs (-140 et $\ln(0,9) < 0$ car $0,9 < 1$).

29.6 Développement sur l'étude des suites récurrentes

◊

29.6.1 Montrer qu'un intervalle est stable

On rappelle la définition d'un intervalle stable par f

Définition 29.37.
On dit qu'un intervalle $J \subset I$ est *stable* par f si $f(J) \subset J$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J.$$

► Méthode 29.38.
Pour montrer qu'un intervalle J est stable par f, on pourra selon les cas :

— soit déterminer $f(J)$ à l'aide du tableau de variation de f et vérifier que $f(J) \subset J$;

— soit si $J = [a; b]$ et si $a \leqslant x \leqslant b$, montrer que $a \leqslant f(x) \leqslant b$.

Dans tous les cas, avant de commencer l'étude de la suite (u_n), il est impératif de faire l'étude de f, d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Propriété 29.39.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$ est stable par f. Si $u_0 \in J$, alors la suite (u_n) est bien définie et $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour montrer que la propriété $P(n)$: « u_n existe et $u_n \in J$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra utiliser que J est stable par f et faire la récurrence suivante.

Initialisation : On a $u_0 \in J$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la propriété soit vraie au rang n. On a par hypothèse de récurrence, $u_n \in J \subset \mathscr{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien. De plus, puisque J est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(J) \subset J$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à J.

□

29.6.2 Étude des variations de suites récurrentes

Propriété 29.40. *Monotonie de (u_n)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Si f est *croissante* sur I alors la suite (u_n) est monotone :

— Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors (u_n) est croissante.

— Si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, alors (u_n) est décroissante.

Démonstration. Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$ alors $u_1 \geqslant u_0$. La relation $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ permet alors de montrer par récurrence que (u_n) est croissante.

On procède de la même manière si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$ pour montrer que (u_n) est décroissante. □

Remarque 29.41.
Dans le cas f croissante, pour déterminer la monotonie de (u_n), il s'agira de déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur I, et de dresser éventuellement son tableau de signe.

Et dans le cas f décroissante ?

Propriété 29.42.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Démonstration. On pose $g = f \circ f$. g est croissante sur I. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+2}$. Les deux suites vérifient :

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}) = g(u_{2n}) = g(v_n)$$

et de même $w_{n+1} = g(w_n)$. La propriété précédente permet d'en déduire que chacune des suites (v_n) et (w_n) est monotone.

Supposons par exemple que (v_n) est croissante. On peut alors écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$. En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit $f(v_n) \geqslant f(v_{n+1})$ c'est-à-dire $w_n \geqslant w_{n+1}$. La suite (w_n) est donc décroissante.

Un raisonnement similaire permet de montrer que si (v_n) est décroissante alors (w_n) est croissante. □

Remarque 29.43.
Il s'agira donc :

- de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissante pour conclure sur la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
- d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) :
  - si $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), (u_{2n}) est croissante (resp. décroissante).
  - si $g(u_1) - u_1 \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$) $(u_{2n=1})$ est décroissante (resp. croissante).

29.6.3 Étude de la convergence des suites récurrentes

Propriété 29.44. *Convergence de (u_n)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Si f est continue sur I et si (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

Démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en $\ell \in I$ et (u_n) converge vers ℓ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$. □

Remarque 29.45.
Pour déterminer les points fixes de f, on étudie les antécédents de 0 par la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I.

Définition 29.46.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est contractante si elle est k-lipschitzienne, avec $0 \leqslant k \leqslant 1$, c'est-à-dire : pour tout x et $y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

Remarque 29.47.
Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ soit de plus dérivable. Pour montrer que f est contractante sur I, on pourra tenter de majorer sa dérivée f' sur I par uns constante $k < 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduire que f est contractante.

Propriété 29.48.
Soit $f : I \to I$ une fonction contractante. Si f admet un point fixe ℓ, alors ℓ est unique et toute suite définie par récurrence par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

Démonstration.

— Supposons avoir un deuxième point fixe $\ell_1 \neq \ell$. Alors $|f(\ell) - f(\ell_1)| \leqslant k\,|\ell_1 - \ell|$, c'est-à-dire $|\ell - \ell_1| \leqslant k\,|\ell - \ell_1|$, c'est-à-dire $1 \leqslant k$ (car $|\ell - \ell_1| > 0$) ce qui est absurde ! Ainsi si f admet un point fixe ℓ, celui-ci est unique.

— Soit (u_n) une suite d'éléments dans I définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.

Initialisation : La propriété $P(0)$ est évidente.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$. Alors on a :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_n - \ell| \leqslant k \times k^n\,|u_0 - \ell| = k^{n+1}\,|u_0 - \ell|\,.$$

Donc : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Comme $k \in]0;1[$, $(k^n\,|u_0 - \ell|)$ converge vers 0 donc (u_n) converge vers ℓ.

□

Remarque 29.49.
Il faut savoir redémontrer l'inégalité suivante :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

▶ **Méthode 29.50.** *Calcul approché du point fixe*
Si $I = [a;b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \leqslant k^n\,|b - a|\,.$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $k^n\,|b-a|$.

Remarque 29.51.
Dans le cas où f est décroissante, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, c'est vers des points fixes de $g = f \circ f$. Il s'agit alors de montrer que ces deux sous-suites convergent vers le même point fixe α. On peut alors conclure que (u_n) converge vers α grâce au résultat connu suivant :

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

On pourra retrouver des exemples d'études de suites récurrentes dans le polycopié : C. Parfenoff, *Etude de limites de suites définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*

29.7 Applications et compléments

29.7.1 Approximation de $\sqrt{a}$, $a > 0$

Le procédé suivant, pour le calcul de la racine carrée d'un nombre réel $a > 0$ est attribué à Héron d'Alexandrie, grec, 1er siècle, également appelé Héron l'Ancien. Ce procédé était déjà connu des Babyloniens, 300 à 400 années avant, et il s'écrit au moyen des suites numériques de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

La fonction f associée à cette suite est $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ que nous considérerons que pour $x > 0$. L'équation $f(x) = x$ a pour seule solution positive $x = \sqrt{a}$.

1. On se donne un $u_0 > 0$. On a par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n.
2. Un calcul simple montre que :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

Si $u_0 = \sqrt{a}$, la suite est constante égale à $\sqrt{a}$. Si $u_0 \neq \sqrt{a}$, pour tout $n \geqslant 1$, l'égalité précédente prouve que $u_n > \sqrt{a}$: cette suite est minorée par $\sqrt{a}$.

3. Comme : $0 < \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n} < \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n}(u_n - \sqrt{a}) < \frac{u_n - \sqrt{a}}{2} < u_n - \sqrt{a},$$

cette suite est décroissante pour tout $n \geqslant 1$ et minorée par $\sqrt{a}$: elle est donc convergente. Sa limite est le seul point fixe positif positif : $\sqrt{a}$.

29.7.2 Probabilités conditionnelles et suites récurrentes

▶ **Exercice 29.52.** *BAC S Liban 2018, Exercice 5 (obligatoire)*
Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

— Si le joueur gagne une partie, la partie qu'il gagne la partie suivante est $\dfrac{1}{4}$;

— Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\dfrac{1}{2}$;

— La probabilité de gagner la première partie est $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

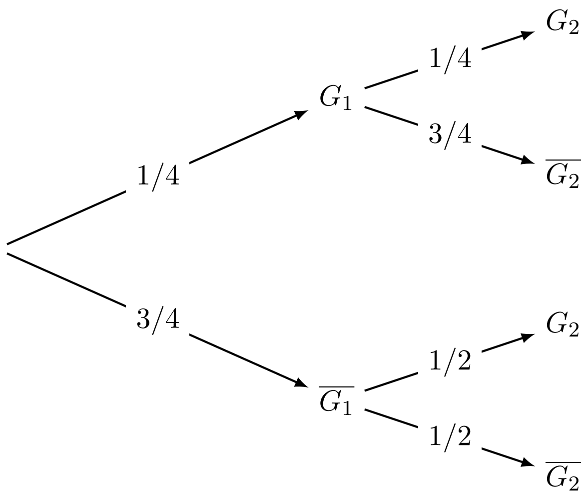
n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	$0,25$	$0,4375$	$0,3906$	$0,4023$	$0,3994$	$0,4001$	$0,3999$

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel naturel n non nul, $p_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   (c) La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Solution. ◇

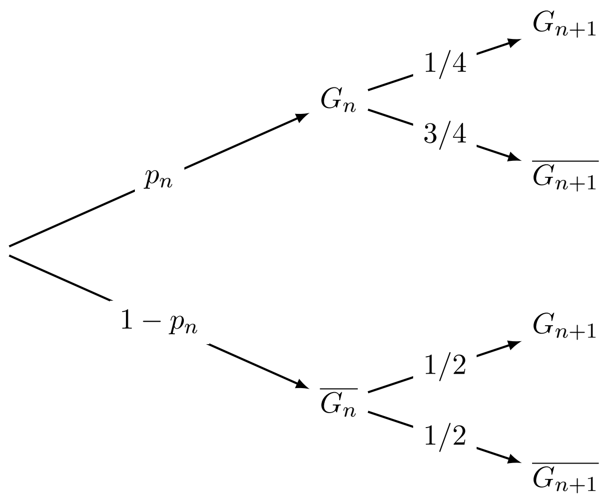
1. Tout d'abord, on peut établir un arbre de probabilité pour modéliser la situation sur deux parties :



Les événements G_1 et $\overline{G_1}$ forment un système complet d'événement dans Ω donc on peut utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(G_2)$. On a :

$$\begin{aligned} p_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) \\ &= P(G_1)P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1})P_{\overline{G_1}}(G_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{8} == \frac{1+6}{16} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. On peut reprendre l'arbre de probabilité précédent pour les événements G_n et G_{n+1}.



On remarque que les événements G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers Ω donc on peut utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $P(G_{n+1})$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n})P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2} \times (1-p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. D'après le tableau des premières valeurs de p_n, on peut conjecturer que la suite (p_n) converge vers 0,4.
4. (a) On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{5-4}{10} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} \\ &= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{10}\right) = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}.$$

(b) D'après un résultat sur les suites géométriques, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}) - \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

Or $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

(c) Comme $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, la limite $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5}.$$

On en déduit, qu'après un grand nombre de parties, la probabilité de gagner se stabilise aux alentours de $\frac{2}{5}$.

□

29.7.3 Suites récurrentes homographiques. Dossier CAPES.

Source : Série Accompagnement des programmes, 2004, Enseignement obligatoire, baccalauréat séries S et ES

▶ **Exercice 29.53.**

Soit I l'intervalle $[0;1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

   Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. (a) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
   (b) En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?
   (c) Établir la relation :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$

   On pourra d'abord calculer $f(x) - x$.
   (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
   (e) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

(f) Prouver que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\ell = f(\ell)$ et calculer ℓ.

Deuxième méthode : soit $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

4. (a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5} = f'(\ell)$.
   (b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.
   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Solution. $\Diamond$ Soit I l'intervalle $[0;1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Pour tout $x \in I$, on a :
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
avec $u(x) = 3x + 2$ et $v(x) = x + 4$. On obtient les dérivées suivantes $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$ et par suite :
$$f(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{3x + 12 - 3x - 2}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2}.$$
$10 > 0$ et $(x+4)^2 > 0$ pour tout $x \in I$ donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. On en déduit alors que f est croissante sur $[0;1]$. La fonction f est croissante et continue sur I. De plus,
$$f(0) = \frac{3 \times 0 + 2}{0 + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$f(1) = \frac{3+2}{1+4} = \frac{5}{5} = 1.$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [1/2;1] \subset [0;1]$. On peut donc conclure que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. Soit la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$
Soit n un entier naturel, on pose $P(n)$ la propriété suivante : « $u_n \in I$ ». On démontre que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $u_0 = 0 \in [0;1]$. La propriété $P(0)$ est vraie. La propriété P est initialisée au rang $n = 0$.

   Hérédité : On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n \in I$. On démontre que la propriété $P(n+1)$ est vraie. Or, $u_{n+1} = f(u_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;1]$ implique que $f(u_n) \in [1/2;1] \subset [0;1]$ (car f est continue sur $[0;1]$). Ainsi, $u_{n+1} \in [1/2;1] \subset [0;1]$.
   La propriété $P(n+1)$ est vraie donc la propriété P est héréditaire à partir du rang $n = 0$.

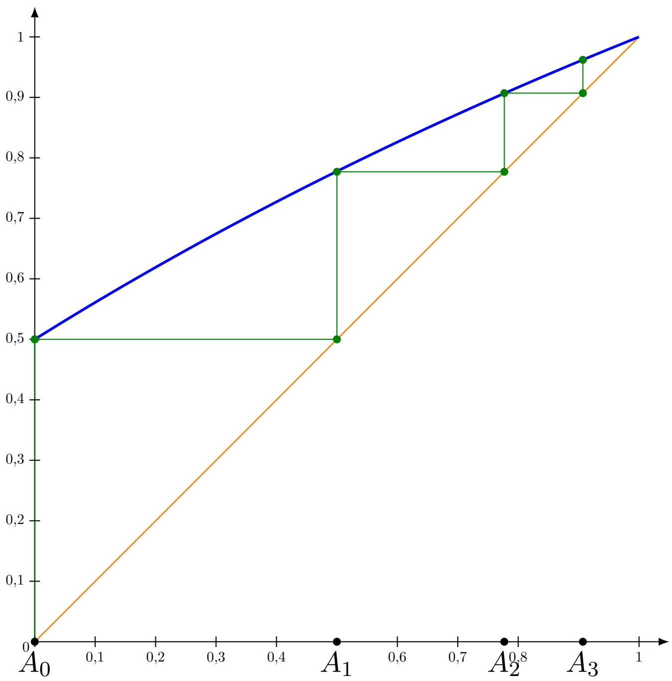
   Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Voir figure page suivante. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentée en bleu.
   (b) On a représenté, sur la figure page suivante, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 qui représente sur l'axe des abscisses respectivement u_0, u_1, u_2, u_3.
   (c) On a :
$$f(x) - x = \frac{3x+2}{x+4} - x = \frac{3x+2}{x+4} - \frac{x(x+4)}{x+4}$$
$$= \frac{3x + 2 - x^2 - 4x}{x+4} = \frac{-x^2 - x + 2}{x+4}$$

Or $(1-x)(x+2) = x - x^2 + x - 2x = -x^2 - x + 2$. Donc :

$$f(x) - x = \frac{(1-x)(x+2)}{x+4}.$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient l'identité :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$



(d) On a : $0 < u_n < 1$ donc $u_n - 1 < 0$ et $1 - u_n > 0$. De plus comme $u_n > 0$, on a bien $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est donc croissante.

(e) Comme $0 < u_n < 1$, la suite (u_n) est bornée et plus précisément, elle est majorée par 1. La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, la suite (u_n) est donc convergente vers ℓ.

(f) f est continue en $\ell \in I$ et (u_n) converge vers ℓ donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. On a :

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{3\ell+2}{\ell+4} - \ell = 0 \Leftrightarrow \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{\ell+4} = 0$$

(la dernière égalité a déjà été démontrée à la question 3c). Or $\ell \in [0;1]$ donc la seule solution à l'équation est $\ell = 1$.

4. Soit $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

(a) On montre que la suite (v_n) est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \frac{\frac{3u_n+2-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}} \\ &= \frac{3u_n+2-u_n-4}{3u_n+2+2u_n+8} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+5)} = \frac{2}{5}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme :

(b) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\dfrac{1}{2}$. On a ainsi :

$$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

(c) Or :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -1 - 2v_n \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1}.$$

Or : $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$, on obtient ainsi :

$$u_n = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}.$$

(d) Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. Par opération sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{-1}{-1} = 1.$$

□

29.7.4 Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

La théorie

a et b étant deux scalaires fixés dans K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) avec b non nul, la relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = au_{n+1} + bu_n \quad (R)$$

Les scalaires r tels que la suite (r^n) vérifie (R) sont les solutions de l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$. Le polynôme $X^2 - aX - b$ est alors appelé le polynôme caractéristique de la suite. Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$. Il faut alors distinguer plusieurs cas, selon le nombre de racines du polynôme caractéristique.

Théorème 29.54.
Le terme général d'une suite à valeur dans K et vérifiant (R) est :

1. $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes (dans K) du polynôme $X^2 - aX - b$.
2. $(\lambda + \mu n)r_0^n$ si r_0 est racine double du polynôme $X^2 - aX - b$

avec λ et μ des paramètres dans K déterminés par les deux premières valeurs de la suite.

Le cas 1 se produit par exemple si $K = \mathbb{R}$ et si le discriminant $\Delta = a^2 + 4ab$ est strictement positif ou si $K = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$. De plus, si les deux racines r_1 et r_2 du polynôme $X^2 - aX - b$ sont deux complexes conjugués $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors le terme général d'une telle suite s'écrit également :

$$\rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

avec A et B des paramètres dans K déterminés par les deux premières valeurs de la suite.

Le cas 2 se produit lorsque $\Delta = 0$ et alors la racine double est $r_0 = \frac{a}{2}$.

Un exemple : les nombres de Fibonacci

Imaginons qu'on a un couple A de jeunes lapins à l'instant $t = 0$. Le mois suivant ($t = 1$) les deux lapis sont adultes et le couple est appelé B. Après un deuxième mois ($t = 2$) deux jeunes lapins naissent et on a deux couples B et A.

Le nombre de couples de lapins (si on respecte cette modélisation) est 1, 1, 2, 3, 5, 8...C'est ce qu'on appelle les nombres de Fibonacci (mathématicien italien (1175-1250)). On définit ainsi la suite de Fibonacci de la manière suivante.

Définition 29.55.
La suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

est appelé la *suite de Fibonacci*.

Le polynôme caractéristique de cette suite est : $\chi(x) = x^2 - x - 1$ admettant pour racines :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

φ est appelé le *nombre d'or*. On a la propriété suivante :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} F_0 = \lambda + \mu \\ f_1 = \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} \end{cases}$$

On obtient, après calculs, la formule suivante :

Proposition 29.56. *Formule de Binet*
Si (F_n) désigne la suite de Fibonacci, alors :

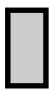
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{\sqrt{5}}{4}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

On donne un exemple d'utilisation des nombres de Fibonacci.

▶ **Exercice 29.57.**
On dispose d'une grille de dimensions $2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. De combien de façons différentes peut-on disposer des dominos (à couleur unique sans motif) de sorte qu'ils recouvrent totalement la grille ?

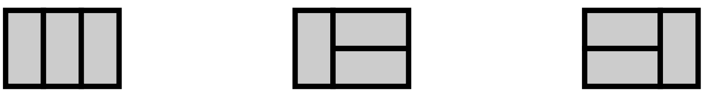
Solution. On regarde le problème pour les premières valeurs de n.

— Si $n = 1$, il n'y a qu'une seule façon de disposer le domino :

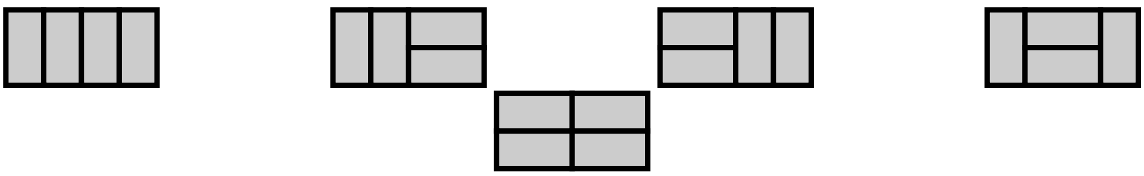


— Si $n = 2$, il y a 2 façons de disposer les dominos :

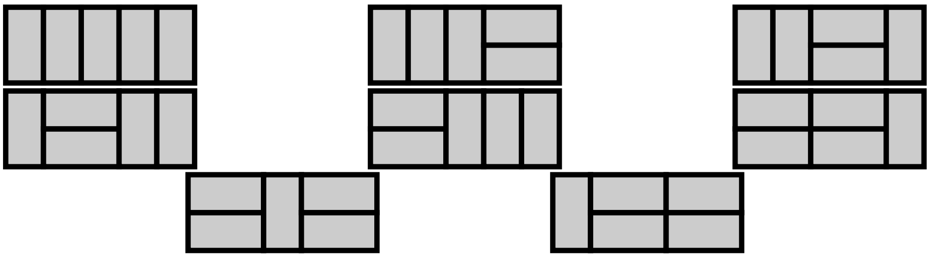
— Si $n = 3$, il y a 3 façons de disposer les dominos :



— Si $n = 4$, il y a 5 façons de disposer les dominos :



— Si $n = 5$, il y a 8 façons de disposer les dominos :



On peut donc constater qu'il y a F_n façons de disposer les dominos si on a n dominos à notre disposition. □

29.7.5 Évolution d'une population

On s'intéresse à l'évolution d'une population. Soit p_n l'effectif de la population à l'instant n. On suppose qu'il n'y a aucun flux migratoire. L'évolution de l'effectif de la population résulte donc uniquement des naissances et des décès. On note α le taux de natalité ($\alpha \geqslant 0$) et ω le taux de mortalité ($0 < \omega < 1$). On a :

$$p_{n+1} = p_n + \alpha p_n - \omega p_n = p_n(1 + \alpha - \omega). \tag{29.1}$$

Cependant, il paraît raisonnable de penser que les taux de natalité et de mortalité sont dépendants de l'effectif de la population. En effet, si l'effectif de la population est très important, la compétition entre les individus est accrue. On peut alors imaginer que le taux de natalité diminue et que le taux de mortalité augmente et inversement...

Un modèle un peu plus fin pourrait donc considérer que ω et α sont des fonctions affines dépendantes de p_0 :

$$\begin{aligned} \alpha(p_n) &= \alpha - \alpha' p_n \quad \text{où } \alpha' > 0 \\ \omega(p_n) &= \omega - \omega' p_n \quad \text{où } \omega' > 0. \end{aligned}$$

(29.1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(1 + \alpha - \alpha' p_n - \omega - \omega' p_n) \\ &= p_n(1 + \alpha - \omega) \times \left(1 - \frac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n\right). \end{aligned}$$

On pose $u_n := \dfrac{\alpha' + \omega'}{1 + \alpha + \omega} p_n$. Comme $p_{n+1} > 0$, $p_n > 0$ et $(1 + \alpha - \omega) \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Remarque 29.58.
Que caractérise u_n ?

- Si u_n est nul (ou tout au moins très petit) alors on en revient au premier modèle, c'est-à-dire les taux de natalité et de mortalité sont très peu sensibles à l'effectif de la population.
- Si u_n s'approche de 1, l'évolution de l'effectif en ait fortement impacté.

Conclusion : u_n caractérise la sensibilité des taux de mortalité et de natalité à l'effectif de la population.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} p_{n+1} \text{ où } a = 1 - \omega + \alpha \\ &= \frac{\alpha' + \omega'}{a} a p_n (1 - u_n) \\ &= u_n \times a \times (1 - u_n). \end{aligned}$$

(u_n) est donc une suite récurrente avec $g(x) = ax(1 - x)$.

Remarque 29.59.
$a > 0$ car $1 - \omega > 0$ et $\alpha > 0$. On peut considérer que a n'est pas très grand, sinon cela signifierait qu'il y a un grand écart entre α et ω. Prenons $0 < a < 2$.

On peut alors montrer que $g([0;1]) \subset [0;1]$. Les points fixes de g sont $\overline{x_1} = 0$ et $\overline{x_2} = \dfrac{a-1}{a}$.

— Si $0 \leqslant a < 1$ seul $\overline{x_1}$ est dans $[0;1]$ et c'est un point fixe attractif car $g'(x) = a - 2ax$ et $g'(\overline{x_1}) = a$.
— Si $1 \leqslant a < 2$, on a : $g'(x) = a - 2ax$, $g'(\overline{x_1}) = 0 > 1$ donc $\overline{x_1}$ est répulsif. Puis : $g'(\overline{x_2}) = a - 2a\dfrac{a-1}{a} = 1 - a$. Or :

$$1 \leqslant a < 2 \Leftrightarrow -2 < -a \leqslant -1 \Leftrightarrow -1 < 1 - a \leqslant 0$$

donc $\overline{x_2}$ est attractif.

29.7.6 Une autre piste d'étude

On pourra s'intéresser au sujet BAC S Pondichéry Ex 4 obligatoire et Ex 4 spécialité. Il est question de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n, n)$ (pour l'exercice obligatoire) et des suites imbriquées (pour l'exercice de spécialité).

LEÇON

30

Détermination des limites d'une fonction réelle de variable réelle.

Préambule

Niveau : terminale « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Complémentaires »

Prérequis : fonctions

Références :

[1] G. Costantini, *Les limites.* Première S. [url].

[2] X. Delahaye, *Limites, Terminale S.* [url]

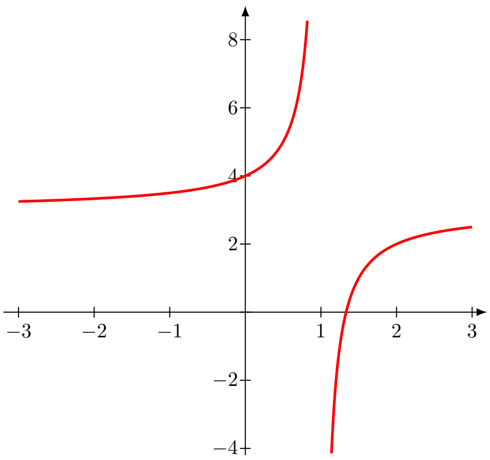
Le texte de la leçon présente est tirée de la leçon de la session 2022 intitulée : « Limite d'une fonction réelle de variable réelle. ».

30.1 Introduction

Exemple 30.1.
On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$$

dont une représentation graphique est donnée ci-dessous :



1. Si on calcule les valeurs de f quand x deviennent très grand, on obtient :

x	2	5	10	50	100	1000	10000
$f(x)$	2	2,75	2,88889	2,97959	2,98989	2,99899	2,99989

On constate que lorsque les nombres x devient de plus en plus grands, les nombres $f(x)$ s'approchent aussi près que voulu du nombre 3. On dire que la limite f en $+\infty$ est égale à 3.

2. Si on calcule maintenant les valeurs de la fonction lorsque la variable x s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,2	1,5	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003	$\times$	-9997	-997	-97	-7	-2	1	2

On dira alors que f n'a pas de limite ou mieux :

— la limite de f en 1 à gauche est égale à $+\infty$;

— la limite de f en 1 à droite est égale à $-\infty$.

30.2 Définitions

30.2.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

On donne tout d'abord des définitions intuitives de la limite :

Définition 30.2.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :

grands [a], on dit que f a *pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

grands en valeurs absolue mais négatifs on dit que f *a pour limite* $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

proches d'un réel ℓ [b], on dit que f *a pour limite* ℓ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

a. Par l'expression « de plus en plus grand », il faut entendre « aussi grand que voulu ».
b. Par l'expression « de plus en plus proche », il faut entendre « aussi proche que voulu ».

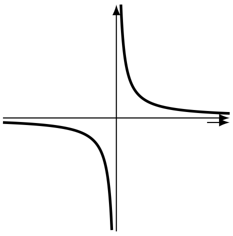
On donne maintenant des définitions plus rigoureuses bien qu'elle ne soit pas utilisé en classe de Terminale Spécialité.

Définition 30.3.

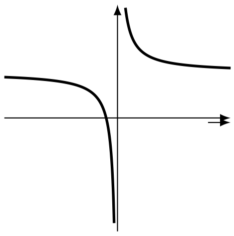
1. Si pour tout réel M positif, il existe un réel A tel que « $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$ », alors on dit que f *a pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si pour tout réel M négatif, il existe un réel A tel que : « $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$ » alors on dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. S'il existe un réel ℓ tel que pour tout intervalle $]\ell-\varepsilon ; \ell+\varepsilon[$, $(\varepsilon > 0)$ et il existe un réel A tel que « $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \in I$ ». Alors on dit que f a *pour limite* ℓ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exemples 30.4.

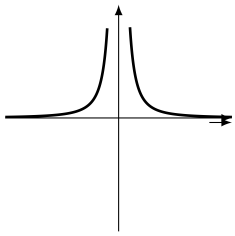
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$,
2. $\lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) = 2$,
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$,
4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
5. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,
6. $\lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$,
7. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,
8. $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = --\infty$.



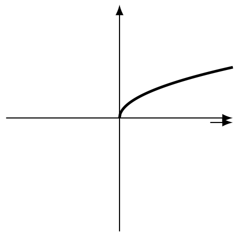
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$



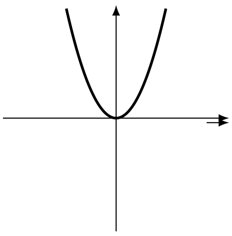
$\lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) = 2$



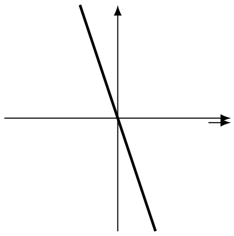
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



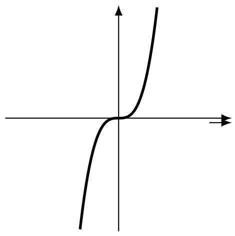
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



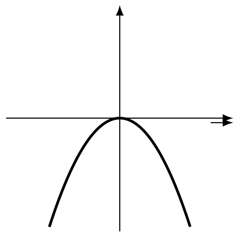
$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



$\lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$

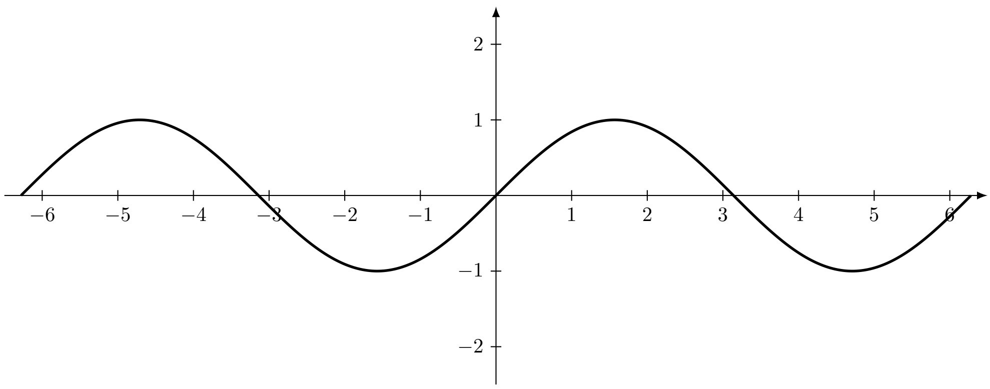


$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$



$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\infty$

Remarque 30.5.
Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$, c'est le cas, par exemple, pour la fonction sinus et cosinus.



On a tracé, ci-dessus, la courbe représentative de la fonction sinus. On peut remarquer que la fonction oscille indéfiniment sur l'intervalle $[-1;1]$. Ainsi la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

30.2.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Définition 30.6.
Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty;a[$. Lorsque $-x$ prend des valeurs de plus en plus grandes, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

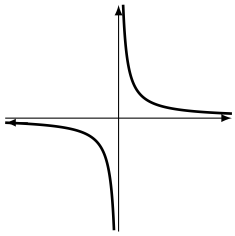
grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$;

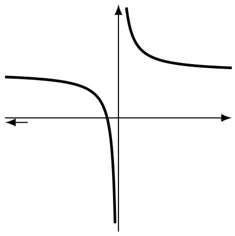
grands en valeurs absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ et $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples 30.7.

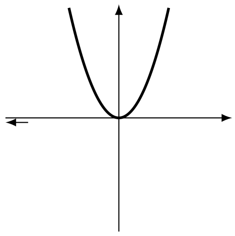
1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty,$
3. $\lim_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2,$
4. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$



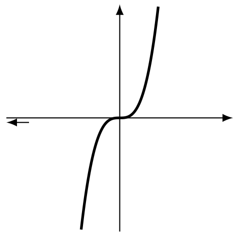
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



$\lim_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$



$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

30.2.3 Limite d'une fonction en un réel a

Définition 30.8.
Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

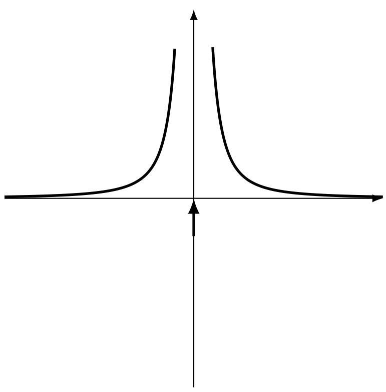
grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

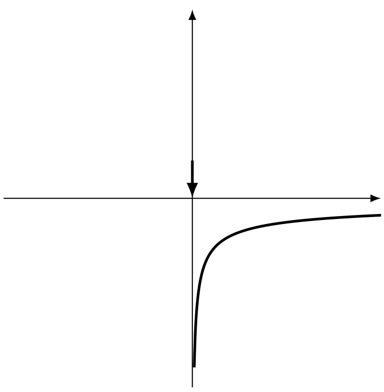
grands en valeur absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemples 30.9.

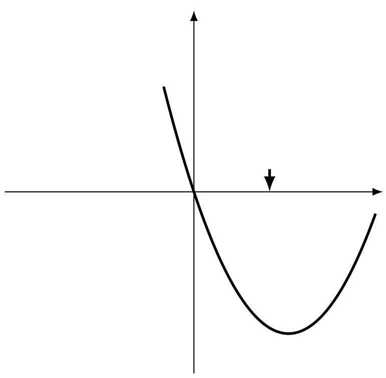
1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$
2. $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty,$
3. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 5x) = -6.$



$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$



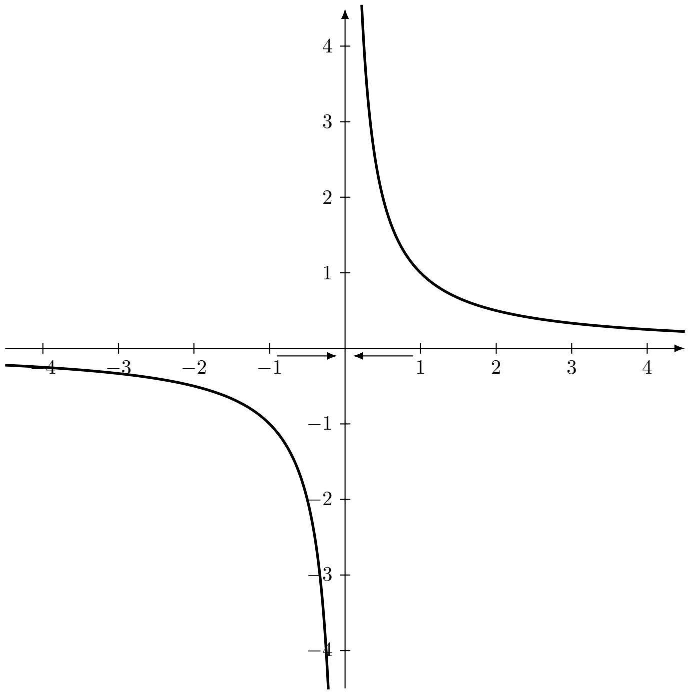
$\lim_{x\to 2}(x^2 - 5x) = -6$

Remarque 30.10.
Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en a ; c'est le cas de la fonction inverse, qui n'a pas de limite en 0.

30.2.4 Limite d'une fonction à droite (ou à gauche)

La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si x s'approche de 0, les nombres $\frac{1}{x}$ ne rentrent pas dans le cadre de la définition 30.8. Cependant, on peut parler de limite « à droite » et de limite « à gauche » : on note alors 0^+ pour signifier que x s'approche de 0 par valeur supérieure et 0^- pour signifier que x s'approche de 0 par valeur inférieure.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

30.3 Opérations sur les limites

Propriété 30.11.
Les tableaux ci-dessous permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux fonctions f et g, ainsi que la limite de l'inverse d'une fonction f lorsqu'on connaît la limite de deux fonctions. Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0, des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de même nature.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (suivant les signes)	forme ind.

Si f a pour limite	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarques 30.12.

1. Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.
2. Les formes indéterminées sont de deux types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty - \infty$, $0 \times +\infty$.

Exemples 30.13.

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^3+x+15) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+15) = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty}(-2x(x+3)) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{x-2} = -\infty$ car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}(x-2) = -2$.

Propriété 30.14.
- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes des plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples 30.15.

1. $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x^3+2x^2+3x-5 = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$.

30.4 Asymptotes

30.4.1 Asymptote horizontale

Définition 30.16. *Asymptote horizontale*

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ (resp $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$) on dit que la droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple 30.17.

$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2+\frac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$. (voir figure page suivante)

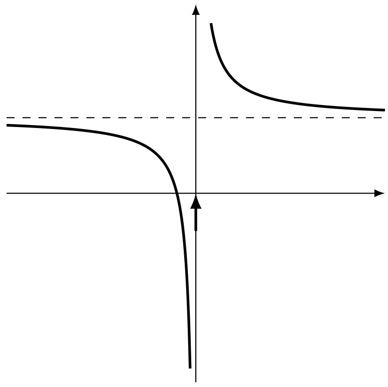
30.4.2 Asymptote verticale

Définition 30.18. *Asymptote verticale*

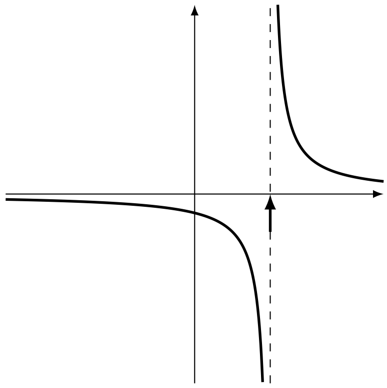
Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exemple 30.19.

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ (et $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$. (voir figure page suivante)



Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$



Asymptote verticale d'équation $x = 2$

30.5 Théorème de comparaison

30.5.1 Théorème de majoration, minoration

Théorème 30.20.
Soit f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a ; +\infty[$.

— Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

— Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 30.21.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \sin(x)$. On calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose $v(x) = -x + 1$. Comme, pour tout x, $\sin x \leqslant 1$, on a, pour tout x, $f(x) \leqslant v(x)$.
   Or, $\lim_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Soit g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$. On pose $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Comme, pour tout x, on a $1 \leqslant \sqrt{1+x^2}$, on a, pour tout x, $g(x) \geqslant u(x)$.
   Or, $\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

30.5.2 Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »

Théorème 30.22.
Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a ; +\infty[$. Si, pour x assez grand, on a $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = \ell$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Démonstration. $\lozenge$ Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour tout intervalle ouvert U contenant ℓ :

— Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage V_1 de a tel que pour tout x de V_1, $f(x) \in U$.

— Puisque $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$, il existe un voisinage V_2 de a tel que pour tout x de V_2, $h(x) \in U$.

— Enfin, d'après la propriété d'encadrement, il existe un voisinage V_3 de a tel que, pour tout x de V_3, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

L'intersection de trois voisinages est un voisinage donc $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ est un voisinage de a et pour tout a de V, on a :

$$\begin{cases} f(x) \in U \\ h(x) \in U \\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \end{cases}$$

d'où il vient que pour tout voisinage U contenant ℓ, il existe un voisinage V tel que $x \in V$ implique $g(x) \in U$. Ce qui prouve que :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

$\square$

Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en a.

Exemples 30.23.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}.$$

On veut calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On pose :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1,$$

on en déduit que, pour tout $x \neq 0$:

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x).$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = 1,$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

LEÇON

31

Théorème des valeurs intermédiaires.

Préambule

Niveau : terminale : « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Complémentaires »

Prérequis : fonctions

Références :

[1] G. Costantini, *Continuité*. Cours de Terminale S. [url]

[2] G. Leahpar, *Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Leçon nº 60 du CAPES 2010.* [url]

31.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 31.1. *Théorème des valeurs intermédiaires*
Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application *continue* sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

◊ *Démonstration du théorème 41.7.* Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

— Si le milieu m de l'intervalle $[a; b]$ est tel que $f(m) \geqslant m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.

— Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

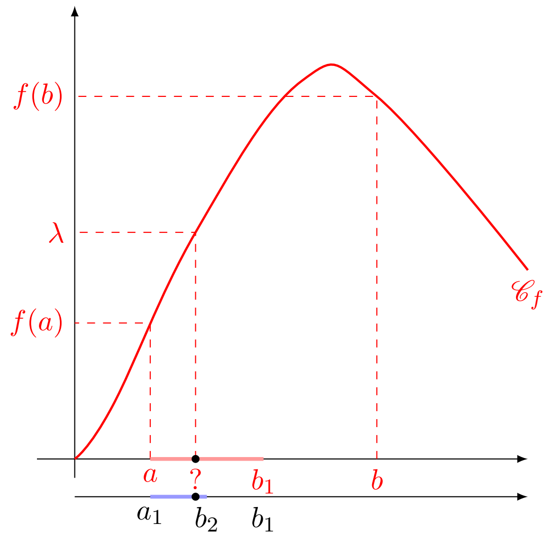
On recommence le découpage :

— Si le milieu m de l'intervalle $[a_1; b_1]$ est tel que $f(m) \geqslant \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.

— Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leqslant \lambda \leqslant f(b_2).$$



En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés [1] :

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \cdots \supset [a_n;b_n] \supset \cdots.$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n;b_n]$ est $\dfrac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n;b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a;b]$). Montrons que $f(c)=\lambda$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

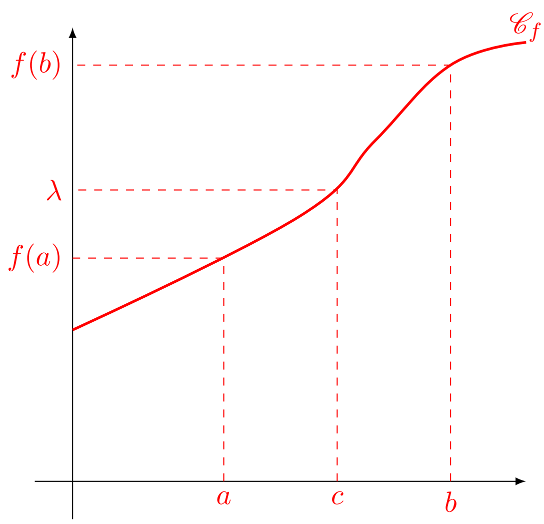
Or, f est continue en c donc :

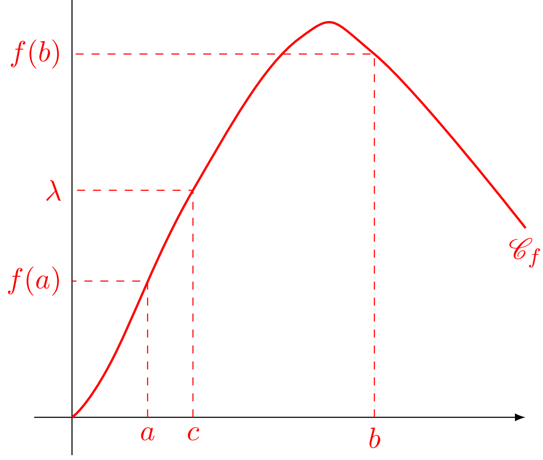
$$f(c) \leqslant \lambda \leqslant f(c)$$

et ainsi $f(c)=\lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c)=\lambda$. □

Remarques 31.2.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x)=\lambda$ (avec $f(a)<\lambda<f(b)$) admet au moins une solution dans $[a;b]$.
2. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a=0$, $b=1$ et $\lambda=\dfrac{1}{2}\ldots$





1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.

Exemple 31.3.
Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in]a; b[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 31.4.
Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_0 \in [-1; 1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

— Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a; b]$).
— Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1; 1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geqslant \frac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \frac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a; b]$.
— On raisonne de même si on a un intervalle $[a; 0]$ ou $[a; b]$ lorsqu'il contient 0.

31.2 Applications

31.2.1 Le théorème du point fixe

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer un petit théorème de point fixe.

Théorème 31.5. *Théorème du point fixe*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$. Si $f(I) \subset I$ alors f admet (au moins) un point fixe sur I. Autrement dit, il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$.

◊ *Démonstration du théorème 31.5.* Considérons la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \in g(I).$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est-à-dire $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. □

31.2.2 Image d'un intervalle par une application continue

Corollaire 31.6. *Image d'un intervalle par une application continue*
Soit f une application *continue* sur un intervalle I. Alors l'ensemble $f(I)$ définie par :

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$

est un intervalle.

◊ *Démonstration du corollaire 31.6.* Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leqslant y_2$. Il s'agit de montrer tout élément λ de $[y_1; y_2]$ est élément de $f(I)$. Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que :

$$f(a) = y_1 \quad \text{et} \quad f(b) = y_2.$$

Comme I est un intervalle, on a : $[a; b] \subset I$. Comme f est continue sur $[a; b]$ (puisque $[a; b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\lambda \in [y_1; y_2]$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$. D'où : $\lambda \in f(I)$. □

Remarque 31.7.
Si f n'est pas continue, il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle : avec $f(x) = \mathrm{E}(x)$, $\mathrm{E}(x)$ désigant la partie entière de x, on a $f([0; 1]) = [0; 1]$.

Exemples 31.8.

1. Soit $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   — Image de l'intervalle ouvert $I =]1; 2[$: $f(I) =]1; 4[$.
   — Image de l'intervalle ouvert $J =]-1; 2[$: $f(J) = [0; 4[$.
   — Image de l'intervalle fermé $H = [-2; 2]$: $f(H) = [0; 4]$.
   — Image de l'intervalle semi-ouvert $K = [0; +\infty[$, $f(K) = K$.
2. Soit $g(x) = \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   — Image de l'intervalle ouvert $I =]0; \pi[$, $g(I) =]0; 1]$.
   — Image de l'intervalle ouvert $J =]0; 2\pi[$: $g(J) = [-1; 1]$.
3. Soit $h(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On veut déterminer $h(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1 + |-x|} = -\frac{x}{1 + |x|} = -h(x),$$

ce qui prouve que h est impaire. Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$. Supposons $0 \leqslant x < y$. Alors :

$$h(y) - h(x) = \frac{y}{1 + y} - \frac{x}{1 + x} = \frac{y(1 + x) - x(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{y - x}{(1 + x)(1 + y)}.$$

Or, $y - x > 0$ d'où :

$$h(x) - h(y) > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(y).$$

Ceci prouve la stricte croissance de h dans $\mathbb{R}_+$. Comme h est impaire, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x} = 1,$$

et, h étant impaire :

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -1.$$

Montrons que h est bornée par -1 et 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il est clair que $0 \leqslant x \leqslant 1+x$. Comme $1+x \geqslant 0$, on peut diviser par $1+x$:

$$0 \leqslant \frac{x}{1+x} \leqslant 1$$

et comme $x = |x|$ (puisque $x \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1.$$

Comme h est impaire, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leqslant h(x) \leqslant 1.$$

Donc h est bornée par -1 et 1 (mais elle n'atteint pas ses bornes). On a donc $h(\mathbb{R}) \in \left]-1;1\right[$. Réciproquement soit $y \in \left]-1;1\right[$. Comme h est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = y$. Donc $\left]-1;1\right[\subset h(\mathbb{R})$. D'où :

$$h(\mathbb{R}) = \left]-1;1\right[.$$

31.2.3 Image d'un segment par une application continue

La démonstration est hors programme, on pourra admettre le théorème lors de la présentation du plan.

Théorème 31.9. *Image d'un segment par une application continue*
Soit f une application continue sur un segment I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un segment.

Pour démontrer le théorème 31.9, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 31.10.
Soit f une fonction numérique définie sur un segment $[a;b]$. Si f est continue sur $[a;b]$, f est bornée sur $[a;b]$.

◊ *Démonstration du lemme 31.10.* On suppose que f est non bornée et on reprend la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. On suppose que c est la limite commune des suites (a_n) et (b_n) construite dans cette démonstration. Or f est non bornée sur $[a_n;b_n]$, on peut donc construire une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, $c_n \in [a_n;b_n]$ et $|f(c_n)| \geqslant n$. La première relation nous montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c ce qui est contradictoire avec la seconde relation si on suppose f continue sur $[a;b]$. □

◊ *Démonstration du théorème 31.9.* Soit $[a;b]$ un segment de I. D'après le lemme précédent, il existe deux réels m et M tel que $f([a;b])$ soit l'un des intervalles $]m;M[$, $[m;M[$, $]m;M]$, $[m;M]$, On justifiera de l'impossibilité des trois premières formes en introduisant les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)-m} \quad \text{ou} \quad x \mapsto \frac{1}{M-f(x)}$$

dont on observera qu'elles sont définies et continues sur $[a;b]$ sans y être bornées. □

31.2.4 Théorème de bijection

Le théorème de bijection est une particularisation du théorème des valeurs intermédiaires. On ajoute une condition de plus pour la fonction f : la stricte monotonie.

Théorème 31.11. *Théorème de bijection*
Soit f une application *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle I. Soient a et b dans I avec $a < b$. Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un *unique* c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

◊ *Démonstration du théorème 31.11.*

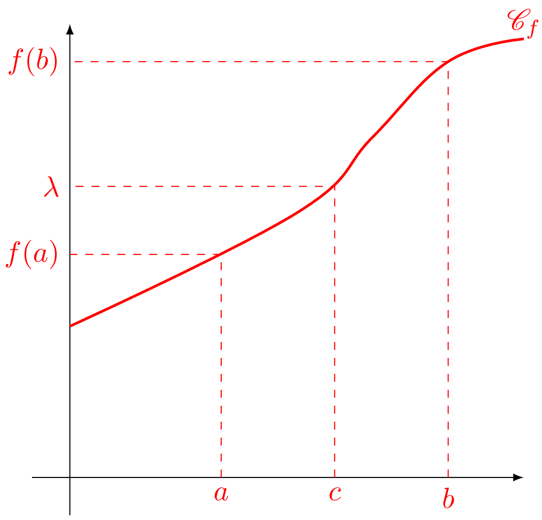
Existence L'existence a déjà été prouvée : c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Unicité L'unicité découle de la stricte monotonie. On va la démontrer dans le cas où f est strictement croissante (le cas strictement décroissante est analogue).

Supposons qu'il existe deux réels c et c' dans $[a; b]$ tels que $f(c) = \lambda$ et $f(c') = \lambda$. Si $c < c'$ alors par stricte croissante de f :
$$f(c) < f(c').$$
Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Si $c > c'$ alors par stricte croissante de f :
$$f(c) > f(c').$$
Ce qui contredit la condition $f(c) = f(c') = \lambda$. Finalement $c = c'$, ce qui prouve l'unicité.

□

Remarque 31.12.
En résumé, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f nous fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$. Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f, nous sommes alors assurés de l'unicité de cette solution.



Dans le cas où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, on a donc moyen de déterminer l'image d'un intervalle $[a; b]$:

— $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$ lorsque f est strictement croissante ;

— $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

Ce résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant les valeurs de f par ses limites.

Corollaire 31.13.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

◊ *Démonstration du corollaire 31.13.* Si $f(a)f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. On conclut avec le théorème de bijection. □

Exemple 31.14.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x.$$

On démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$. La fonction g est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions qui le sont). De plus :

$$g(-1) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1 > 0.$$

Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$. On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$:

x	$-\infty$		-1		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$	
g					0				

On donne maintenant un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

x	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
$g(x)$	$-0{,}899$	$-0{,}792$	$-0{,}673$	$-0{,}536$	$-0{,}375$	$-0{,}184$	$0{,}043$	$0{,}312$	$0{,}629$

On en déduit :

$$-0,4 < \alpha < -0,3.$$

LEÇON

32

Nombre dérivé. Fonction dérivée.

Préambule

Niveau : première « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Spécialité »

Prérequis : continuité en un point d'une fonction, limite en un point d'une fonction

Références :

[1] G. Costantini, *Fonctions dérivables.* Cours de Terminale S.

[2] X. Delahaye, *Dérivée.* Terminale S. [url]

32.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

Théorème 32.1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un réel ℓ tel que l'accroissement moyen ait pour limite ℓ :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell.$$
2. Il existe un réel ℓ et une fonction φ tels que pour tout h tel que $x_0 + h \in I$:
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

◊ *Démonstration du théorème 32.1.*

(i) ⇒ **(ii)** Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell.$$

On pose, pour $h \neq 0$:
$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \ell.$$

Par hypothèse, on a ainsi :
$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

De plus :
$$h\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \ell h.$$

D'où la condition (ii) :
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

(ii) ⇒ (i) Supposons :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0.$$

Pour $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)$$

et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

D'où la condition (i).

□

Définition 32.2. *Nombre dérivé*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. On note

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell := f'(x_0).$$

$f'(x_0)$ est le *nombre dérivé* de la fonction f au point x_0.

Définition 32.3. *Accroissement moyen*

La quantité $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s'appelle *l'accroissement moyen de f en x_0*. Graphiquement, elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f entre les points d'abscisses x_0 et x_0+h.

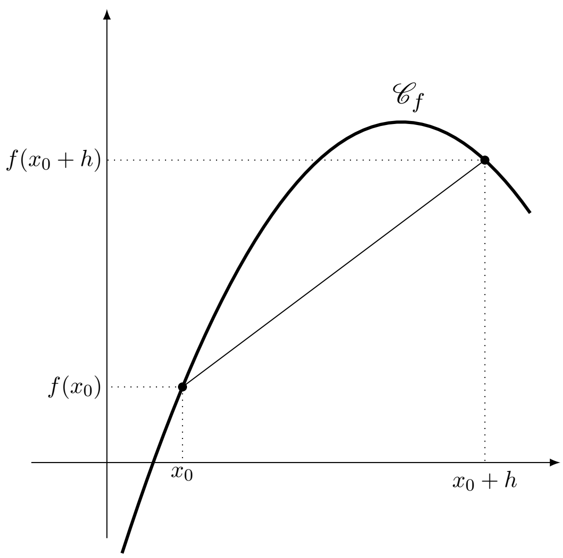


Figure 32.1 – Accroissement moyen de f

La condition (i) du théorème peut donc aussi se traduire par « l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite *finie* ».

Définition 32.4. *Dérivabilité*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I. Lorsque l'une des deux conditions du théorème ci-dessus est vérifiée, on dit que f est *dérivable* en x_0. Le nombre ℓ s'appelle alors *le nombre dérivé de f en x_0* et on le note $f'(x_0)$.

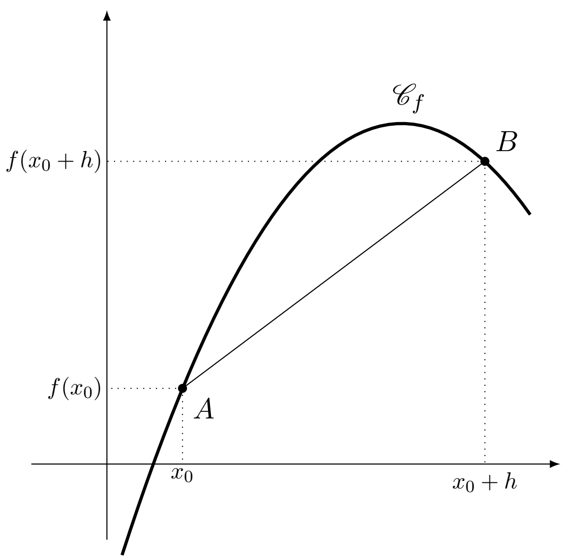
Exemples 32.5.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On étudie la dérivabilité en 0. Pour cela on évalue la limite de l'accroissement moyen de f en $x_0 = 0$:
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$
D'où :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$
La limite n'est pas finie. La fonction « racine carrée » n'est donc pas dérivable en 0.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On étudie la dérivabilité de cette fonction en 0. Nous avons, pour tout $h \neq 0$:
$$\frac{|0+h| - |0|}{|h|} = \frac{|h|}{h}.$$
Or la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = -1.$$
L'accroissement moyen de la fonction f n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

32.2 Différentes interprétations du nombre dérivé

32.2.1 Interprétation graphique du nombre dérivé

Il représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x_0.



Le coefficient directeur de la sécante (AB) est :
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0 :

— le point B tend vers le point A ;

— la droite (AB) tend alors vers la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A ;

— l'accroissement moyen de f en x_0 tend vers $f(x_0)$. A la limite le point B est en A, la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}_f$ en A et son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

32.2.2 Interprétation numérique du nombre dérivé

On a vu que lorsque f est dérivable en x_0, on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0) \quad \text{où } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

Ainsi lorsque x est voisin de x_0, on a l'approximation :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

L'application

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

s'appelle *approximation affine de f en x_0*.

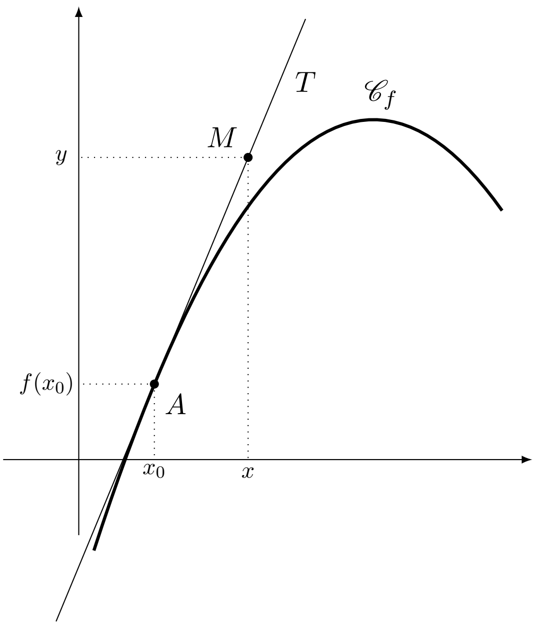
32.2.3 Détermination d'une équation de la tangente

La méthode est classique : soit $M(x, y)$ un point quelconque de cette tangente T distinct de A. Le coefficient directeur de T est :

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

D'où une équation de T :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



On constate que la tangente T n'est autre que la représentation graphique de l'approximation affine de f (en x_0).

Exemple 32.6.
On se donne la fonction f définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = -x^2 + 3.$$

On cherche une équation de la tangente T au point d'abscisse $x_0 = 2$. On calcule $f'(2)$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2 + 3 - (-2^2 + 3)}{h} = \frac{-4h - h^2}{h} = -4 - h$$

donc

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}(-4-h) = -4.$$

L'équation de T est donc :

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = -1 - 4(x-2) = -4x + 7.$$

32.2.4 Interprétation cinématique du nombre dérivé

Supposons ici que f représente la loi horaire[1] d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

32.3 Fonction dérivée

Définition 32.7. *Fonction dérivée*

Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est *dérivable sur I*. On définit alors la *fonction dérivée*, notée f', qui à tout point x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Voici un théorème fondamental :

Théorème 32.8.
Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

◊ *Démonstration du théorème 32.8.* Soit $x_0 \in I$. Puisque f est dérivable en x_0 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

On pose $x = x_0 + h$, il vient alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0) \quad \text{où } \lim_{x\to x_0}\varphi(x-x_0) = 0.$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0)).$$

Or $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)f'(x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est un nombre fini et :

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x-x_0) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La fonction f est donc continue en x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 de I, on en déduit que f est continue sur I. □

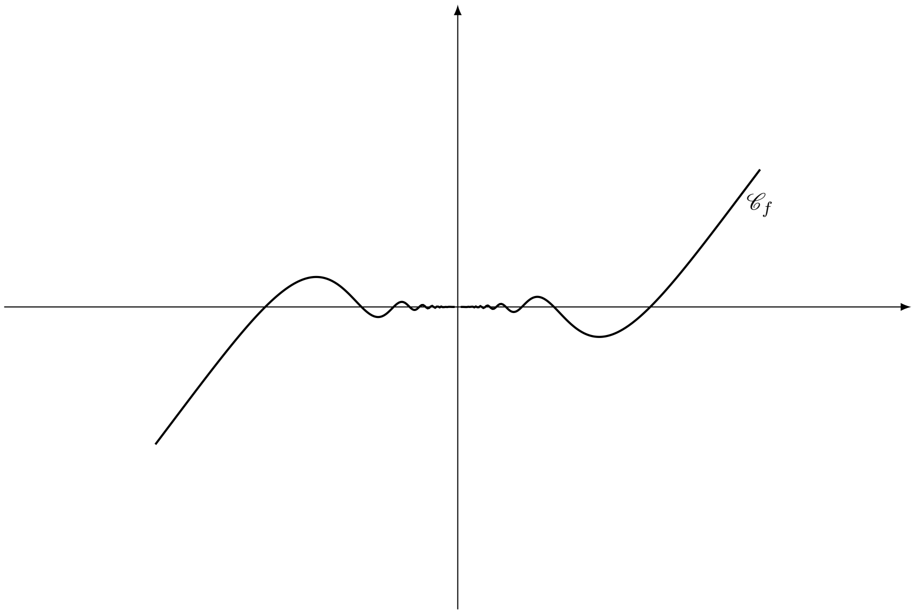
1. La loi horaire d'un mobile en déplacement est une expression algébrique de sa position x et y en fonction de t

Remarques 32.9.

1. La réciproque du théorème 32.8 est fausse. En effet, il existe des fonctions continues en un point x_0 et non dérivables en x_0. C'est le cas, par exemple, de la fonction « valeur absolue ».
2. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue.

Exemple 32.10.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On montre que f est continue en 0. On a, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1.$$

Donc :

$$x^2 \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant x^2.$$

D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0$$

puisque $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Donc :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0. On montre que f est dérivable en 0. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Or :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

Ce qui signifie que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Nous savons que $\lim_{x\to 0} 2x \sin\frac{1}{x} = 0$, mais la quantité $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Donc f' n'a pas de limite en 0, ce qui signifie qu'elle n'est pas continue en 0.

Remarque 32.11.
Si f est dérivable en x_0, alors l'application « coefficient directeur » φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

si $x \neq x_0$ et $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ est continue en x_0 puisque

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f'(x_0).$$

32.4 Applications de la dérivation à l'étude de fonctions

Théorème 32.12. *Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur I si et seulement si
   — $f' \geqslant 0$ sur I (resp. $f' \leqslant 0$)
   — L'ensemble $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

Remarques 32.13.

1. Si $f' > 0$ sur I, sauf en des points isolés où elle s'annule, on a quand même la stricte croissance de f sur I,
2. il n'y a pas équivalence entre les conditions « $f' > 0$ » et « f est strictement croissante sur I ».

On applique les mêmes remarques pour « $f' < 0$ sur I ».

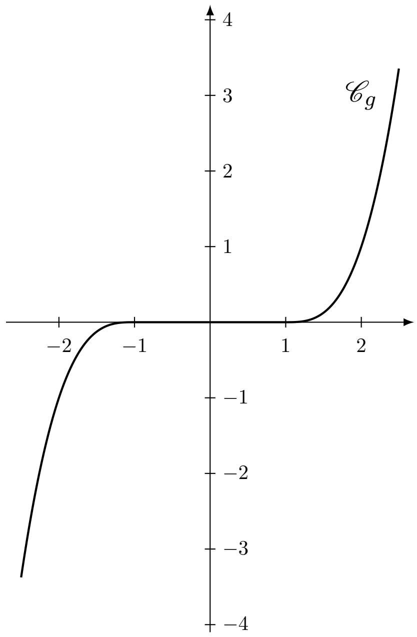
Exemples 32.14.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. La dérivée est toujours strictement positive sauf en 0 où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cet exemple montre donc qu'une fonction strictement croissante sur un intervalle I n'a pas nécessairement une dérivée strictement positive sur I.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a :

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



3. Soit h la fonction définie sur $]-2;-1[\cup]1;2[$ par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-2;-1[\\ 1 & \text{si } x \in]1;2[\end{cases}$$

   On a clairement $h' = 0$ sur $]-2;-1[\cup]1;2[$. Cependant h n'est pas constante, d'où la nécessité de la condition « I est un intervalle » dans le théorème précédent.

Le théorème suivant donne une *condition nécessaire* pour que f ait un extremum local en x_0 :

Théorème 32.15.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques 32.16.
Avant de lire la démonstration, on donne quelques explications :

1. Si a et b représentent les extrémités de l'intervalle I (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), l'intérieur de I est l'intervalle ouvert $]a;b[$.
2. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0, s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) tel que pour tout x de J, on ait $f(x) \leqslant f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.

◊ *Démonstration du théorème 32.15.* Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ soit contenu dans I. Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local. Pour $h \in]0; \varepsilon[$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0.$$

Pour $h \in]-\varepsilon; 0[$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement

$$f'(x_0) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \leqslant 0$$

d'où $f(x_0) = 0$.

Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même. □

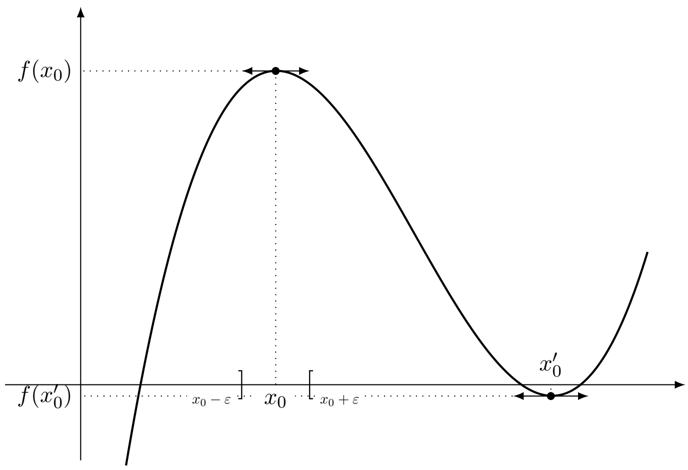


Figure 32.2 – Minimum local et maximum local d'une fonction

Le théorème suivant donne une *condition suffisante* pour que f ait un extremum local en x_0.

Théorème 32.17.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis (voir compléments).

32.5 Dérivation d'une fonction composée et applications

Théorème 32.18.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

◊ *Démonstration du théorème 32.18.* Soit $x_0 \in I$. On écrit :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

On pose $y_0 = u(x_0)$ et $y = u(x)$, ainsi :

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Or, v étant dérivable en y_0, on a :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} = v'(y_0)$$

et u étant dérivable en x_0, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0).$$

D'où :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \times v'(y_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 \in I$, on en déduit la dérivabilité de $v \circ u$ sur I et

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)).$$

□

Conséquence 32.19.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

— Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

— Si $f = u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et u ne s'annulant pas sur I si $n \leqslant -1$) alors f dérivable sur I et $f' = nu'u^{n-1}$.

Exemples 32.20.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$

   On peut écrire $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$. la fonction u est strictement positive sur $]0; +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}, \qquad \text{pour tout } x \in]0; +\infty[.$$

2. Dans la pratique, s'il n'y a pas d'ambiguïté avec les intervalles, on finit par ne plus préciser la composition :

$$f(x) = (2x^2 - x + 1)^6 \qquad f'(x) = 6(4x - 1)(2x^2 - x + 1)^5.$$

32.6 Tableaux des dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Le tableau suivante nous donne les dérivées usuelles. Tous les résultats de ce tableau se démontre essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \tan(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega(1 + \tan^2(\omega t + \varphi))$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{t} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

◊ *Exemples de démonstration de dérivée de fonctions usuelles.*

1. Si $f(x) = x^n$ lorsque $n > 0$, l'accroissement moyen de f en x s'écrit (on utilise la formule du binôme de Newton) :

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

On aurait pu procéder par récurrence en utilisant la formule de dérivation d'un produit.

2. Si $f(x) = \sin(x)$. L'accroissement moyen de f en x s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x.\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin h}{h} = \cos x.$$

$\square$

Le tableau ci-dessous donne les opérations sur les dérivées lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I. Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Fonction	Dérivée	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$nu'u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u'(v' \circ u)$	

◊ *Exemples de démonstration sur les opérations de dérivées.*

1. On veut montrer la relation $(uv') = u'v + uv'$. Pour tout x_0 de I, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, on peut écrire :

$$u(x_0+h) = u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0, \tag{32.1}$$

$$v(x_0+h) = v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\psi(h) = 0. \tag{32.2}$$

En multipliant (32.1) par (32.2), il vient :

$$\begin{aligned} u(x_0+h)v(x_0+h) &= (u(x_0) + u'(x_0)h + h\varphi(h))(v(x_0) + v'(x_0)h + h\psi(h)) \\ &= u(x_0)v(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \end{aligned}$$

où

$$\Phi(h) = u(x_0)\psi(h) + u'(x_0)v'(x_0)h + u'(x_0)h\psi(h) + \varphi(h)v'(x_0)h + h\varphi(h)\psi(h).$$

Nous avons donc :

$$uv(x_0+h) = uv(x_0) + (u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0))h + h\Phi(h) \quad \text{où } \lim_{h\to 0}\Phi(h) = 0.$$

La fonction produit uv admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donc uv est dérivable en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0 de I, on a uv dérivable sur I. On a donc :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

2. On veut montrer la relation $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. On a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}.$$

Or, puisque v est dérivable, on peut écrire :

$$v(x+h) = v(x) + v'(x)h + h\varphi(h).$$

Remplaçons $v(x) - v(x+h)$ par $-(v'(x)h + h\varphi(h))$; on obtient :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{v'(x)h + h\varphi(h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)}.$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v'(x)+\varphi(h)}{v(x)v(x+h)} = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Donc f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$ d'où :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3. On veut montrer la relation $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. On écrit :

$$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$$

et on utilise la dérivée d'un produit et le résultat ci-dessus.

□

32.7 Quelques inégalités

Exemples 32.21.

1. On va montrer les inégalités suivantes sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

   (a) $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$

   (b) $1 - \frac{2x}{\pi} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\pi}{2} - x$.

   On note $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On étudie les fonction f et g sur I par $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$. On a, pour $x \in I$,

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$$

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad g''(x) = -\sin x \leqslant 0.$$

   La fonction f' est positive sur I, donc f est croissante sur I et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur I, donc :

$$\sin x \leqslant x, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

   La fonction g'' est négative sur I, donc g' est décroissante sur I. Or :

$$g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0.$$

   Comme g' est continue et strictement décroissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Donc g' est positive sur $[0; \alpha]$ puis négative sur $\left[\alpha; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que g est croissante sur $[0; \alpha]$ puis décroissante sur $\left[\alpha; \frac{\pi}{2}\right]$.

Mais $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc g est positive sur I :

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \sin x, \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

On montre de même que :

$$1 - \frac{2}{\pi}x \leqslant \cos x \leqslant \frac{\pi}{2} - x, \text{ pour tout } x \in I.$$

2. On montre que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$x \leqslant \tan x.$$

On pose $f(x) = \tan x - x$, pour $x \in J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$f'(x) = \tan^2 x \geqslant 0, \qquad \text{pour tout } x \in J.$$

Donc f est croissante sur J. En outre, $f(0) = 0$ donc f est positive sur J d'où le résultat.

Remarque 32.22.

A l'aide de l'encadrement $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ démontré ci-dessus pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que :

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

On montre que l'encadrement est aussi valable pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$. Le théorème des gendarmes permet alors de retrouver la limite importante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

32.8 Compléments : Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème 32.23. *Théorème de Rolle*
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. ♢ Puisque f est continue, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a; b]) = [m; M]$. Si $m = M$ alors f est constante et donc $f' = 0$ sur $]a; b[$. On suppose alors que $m < M$. Alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$.

— Si $m < f(a)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = m$.

$$\forall x \in]a; c[\, , f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$
$$\forall x \in]c; b[\, , f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

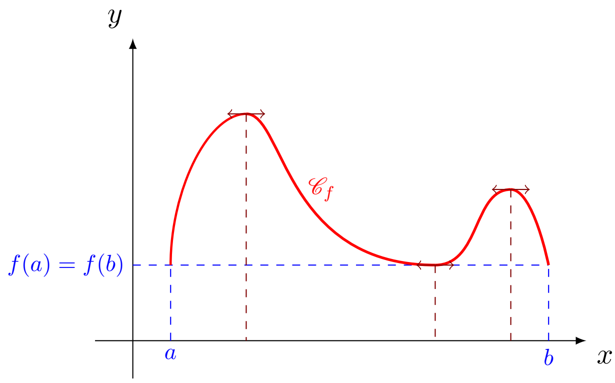
Comme f est dérivable en c, le passage à la limite dans les deux inégalités ci-dessus donne respectivement :

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0,$$

d'où, par continuité de f en c, $f'(c) = 0$.

— si $f(a) < M$, un raisonnement analogue donne le même résultat : $f'(c) = 0$.

□



Théorème 32.24. *Théorème des accroissements finis*
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration. ♢ Soient A un réel et la fonction :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) - f(a) - A(x-a) \end{array}.$$

φ est clairement continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, et vérifie $\varphi(a) = 0$. On détermine alors A tel que $\varphi(b) = 0$:

$$\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On affecte alors cette valeur à A (l'existence est assuré par l'hypothèse $a < b$), de sorte que le théorème de Rolle s'applique, donnant l'existence d'un réel $c \in]a; b[$ tel que :

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - A = 0 \Leftrightarrow f'(c) = A \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Théorème 32.25. *Inégalité des accroissements finis*
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in]a; b[$;, alors :

$$|f(b) - f(a)| < k\,|b - a|\,.$$

Démonstration. ♢ D'après le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} &\exists c \in]a; b[\,, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \\ \Rightarrow\ &\exists c \in]a; b[\,, |f(b) - f(a)| = |f'(c)|\,|b - a| \\ &\Rightarrow |f(b) - f(a)| < k\,|b - a|\,. \end{aligned}$$

□

LEÇON

33

FONCTIONS EXPONENTIELLES.

Préambule

Niveau : première « Mathématiques Spécialité », terminale « Mathématiques Spécialité » et « Mathématiques Complémentaires »

Prérequis : notions de dérivabilité, fonctions logarithmes (voir leçon n° 34), existence d'une solution d'équa diff, bijection, limites, théorème des valeurs intermédiaires, primitives, intégrales, théorème des accroissement finis, résolution d'une équation du second degré, théorème des gendarmes.

Références :

[1] G. BONTEMPS & al., *Fractale, Maths 1re S.* Bordas, Programme 2001.

[2] G. COSTANTINI, *Exercices rédigés sur les exponentielles et les logarithmes.*

[3] G. COSTANTINI, *Fonctions logarithmes.* Cours de Terminale S.

[4] J.-E. VISCA, *Les croissances comparées.* [url]

[5] R. GALANTE, *Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Application.* [url]

Cette leçon provient de la session 2022 : « n° 37 : Fonctions exponentielle et logarithme népérien ». Elle reprend uniquement la partie « Exponentielle ».

33.1 Fonctions exponentielles

33.1.1 La fonction exponentielle

Définition 33.1.
Soit a un nombre réel. On appelle solution sur l'intervalle I de l'*équation différentielle* $Y' = aY$ toute fonction dérivable sur I, qui vérifie sur I : $f' = af$.

Exemples 33.2.
1. La fonction nulle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 2Y$.
2. Les fonctions constantes sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $Y' = 0Y$.

Remarque 33.3.

L'équation différentielle $Y' = aY$, notée aussi $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay$, exprime une proportionnalité entre la fonction et sa dérivée. Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes (en physique,...).

Propriété 33.4. *Théorème d'existence*
Il existe une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$ que l'on appelle la *fonction exponentielle*.

Remarque 33.5.
On notera provisoirement la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$.

Propriété 33.6.
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

◊ *Démonstration de la propriété 33.6.* Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(x) = \exp(x)\exp(-x).$$

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi'(x) = \exp'(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x).$$

Or $\exp' = \exp$ donc $\Phi'(x) = 0$. La fonction Φ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à 1 car $\exp(0) = 1$. Puisque $\exp(x)\exp(-x) = 1$, la fonction exp ne s'annule jamais.

On démontre, par l'absurde, que la fonction exp est strictement positive. S'il existait x_0 tel que $\exp(x_0) \leqslant 0$, alors exp étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction exp sur $[0, x_0]$ ou $[x_0, 0]$, on trouverait une solution à l'équation $\exp(x) = 0$. Ceci est faux puisqu'on a montré que exp ne s'annule jamais, donc x_0 tel que $\exp(x_0) \leqslant 0$ n'existe pas. □

Propriété 33.7.
Soit a un réel donné. Les solutions de l'équation différentielle $Y' = aY$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\exp(ax)$ où k est une constante réelle.

◊ *Démonstration de la propriété 33.7.* La fonction $f : x \mapsto k\exp(ax)$, où k est un réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, vérifie

$$f'(x) = ka\exp(ax)$$

soit $f'(x) = af(x)$. Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $Y' = aY$. Soit g une autre fonction sur $\mathbb{R}$ de $Y' = aY$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$. Comme la fonction exp ne s'annule pas, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $u : x \mapsto \dfrac{g(x)}{\exp(ax)}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, après simplification :

$$u'(x) = \frac{g'(x) - ag(x)}{\exp(ax)}.$$

Or $g'(x) = ag(x)$, donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = 0$. u est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\dfrac{g(x)}{\exp(ax)}$ est constant, soit $g(x) = k\exp(ax)$. □

33.1.2 La notation e^x

Propriété 33.8.
Pour tous nombres réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

$\diamondsuit$ *Démonstration de la propriété 33.8.* Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x+b)$ où b est un nombre réel. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$g'(x) = \exp'(x+b) = \exp(x+b) = g(x)$$

g vérifie l'équation $Y' = Y$. Donc d'après la propriété 33.7, $g(x) = k\exp(x)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x+b) = k\exp(x)$$

et pour $x = 0$,

$$\exp(b) = k\exp(0).$$

or $\exp(0) = 1$ donc $k = \exp(b)$ et on a

$$\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b).$$

$\square$

Propriété 33.9.
Le nombre réel $\exp(1)$ se note e. On a $\mathrm{e} \simeq 2,72$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Remarques 33.10.
Ainsi $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ a un sens, c'est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$. On a aussi :

$$\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},\ \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},\ \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Conséquence 33.11.
1. Pour tous nombres réels a et b :
$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b,\ \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a},\ \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}.$$
2. Pour tout nombre réel a et tout rationnel r : $\mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r$.

Démonstration. $\diamondsuit$

— Tout d'abord, on montre que, pour tout nombre n entier naturel, on a la propriété « Pour tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$ ». La propriété est vraie pour $n = 0$ car, par définition de la fonction exp : $\exp(0) = 1$. Supposons que, pour un entier k, on ait $\exp(ka) = (\exp(a))^k$. Alors, d'après la propriété 33.6, on a :
$$\exp((k+1)a) = \exp(ka+a) = \exp(ka)\exp(a).$$
Donc $\exp((k+1)a) = (\exp(a))^{k+1}$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$. Si on la suppose vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = k+1$, et donc par récurrence, elle est vraie pour tout nombre entier $n \geqslant 0$.

— Par définition, $\exp(1) = \mathrm{e}$ et d'après la propriété 33.6,
$$\exp(1) \times \exp(-1) = \exp(1-1) = 1.$$
Donc $\exp(-1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$.
Si x est un entier positif, on peut écrire $x = na$ avec $a = 1$ et n entier positif.
$$\exp(x) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$$

Soit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Si x est un entier négatif, on peut écrire $x = na$ avec $a = -1$ et n entier positif.

$$\exp(x) = \exp(n \times (-1)) = (\exp(-1))^n.$$

Or

$$(\exp(-1))^n = (\mathrm{e}^{-1})^n = \mathrm{e}^{-n}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

— Si x est un nombre rationnel, on peut écrire $x = pa$ avec $a = \frac{1}{q}$, q entier strictement positif et p un entier relatif.

$$\exp(qa) = (\exp(a))^q$$

Or $qa = 1$ donc $(\exp(a))^q = \mathrm{e}$. Soit $\exp(a) = \mathrm{e}^{1/q}$.

$$\exp(x) = \exp(pa) = (\exp(a))^p.$$

Soit

$$\exp(x) = \left(\mathrm{e}^{1/q}\right)^p = \mathrm{e}^{p/q} = \mathrm{e}^x.$$

Donc, pour tout x élément de $\mathbb{Q}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

— On admet que l'on peut étendre cette propriété à $\mathbb{R}$ et on convient de noter e^x le nombre $\exp(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

□

Exemples 33.12.

1. $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}\mathrm{e}^x$
2. $\mathrm{e}^{x-2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2}$
3. $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$
4. $\mathrm{e}^{x/2} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.

Remarque 33.13.
Ne pas confondre $\mathrm{e}^{(a^b)}$ et $(\mathrm{e}^a)^b$; ainsi $\mathrm{e}^{x^2} = \exp(x^2)$ alors que $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.

33.1.3 Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

D'après sa définition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ et telle que $f(0) = 1$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, et égale à sa dérivée.

Conséquence 33.14.
1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

◊ *Démonstration de la conséquence 33.14.* Le premier point découle immédiatement de la définition de la fonction exp. On a $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et d'après la propriété 33.6, exp est strictement positive. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en 0 donc son taux de variation $\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0}$ a pour limite en 0 le nombre dérivé de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0, soit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

□

Propriété 33.15. *Limites*

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

◊ *Démonstration de la propriété 33.15.* — Pour étudier la limite en $+\infty$, on montre d'abord que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geqslant x$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, on obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f			1		

Comme, pour tout x, $f(x) \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^x \geqslant x$ et, d'après un des théorèmes « des gendarmes », on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

— Pour étudier la limite en $-\infty$, on pose $X = -x$ et on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-X} = +\infty.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0,$$

soit $\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

□

On obtient le tableau de variations de la fonction exp.

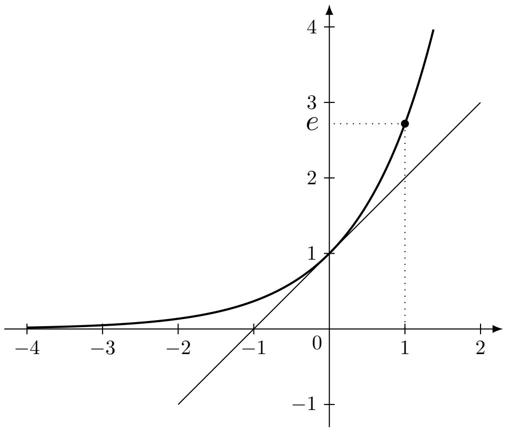
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	0	1	e	$+\infty$

— La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ passe par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,\mathrm{e})$.

— La tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au point de coordonnées $(0,1)$ a pour équation $y = x+1$. De plus, pour h « assez petit » : $\mathrm{e}^h \approx 1+h$.

— La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de l'axe des abscisses, qui est une droite asymptote.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction exponentielle et de sa tangente en $x = 0$.



Conséquence 33.16.
1. Pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.
2. Pour tous nombres réels x et y : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$ équivaut à $x = y$ et $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^y$ équivaut à $x > y$.

Exemples 33.17.
1. $\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x+1}$ équivaut à $3x = x + 1$.
2. $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ équivaut à $x \geqslant 0$.
3. $\mathrm{e}^x \leqslant 1$ équivaut à $x \leqslant 0$.

Propriété 33.18.
Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Si u est dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

◊ *Démonstration de la propriété 33.18.* D'après le théorème de la dérivée d'une fonction composée, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et u dérivable sur I, $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. □

Exemple 33.19.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \cos x\mathrm{e}^{\sin x}$.

Propriété 33.20. *Limites fondamentales*
1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

◊ *Démonstration de la propriété 34.27.* Dans la démonstration de la propriété 33.15, on a vu que, pour tout x, $\mathrm{e}^x \geqslant x$. Donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x/2} \geqslant \dfrac{x}{2}$ et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$(\mathrm{e}^{x/2})^2 \geqslant \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

On a $xe^x = \dfrac{x}{e^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $xe^x = -\dfrac{X}{e^X}$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$. □

Conséquence 33.21.
Pour tout nombre entier n strictement positif :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

◊ *Démonstration de la conséquence 34.28.*

1. Comme $e^x > 0$:

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x = -X$, $x^n e^x = (-X)^n e^{-X}$, soit $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{X^n}{e^x}$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc

$$\lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X} = 0.$$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

□

Exemples 33.22.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^{10}}$, on a :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
2. Soit $g : x \mapsto x^{1000}e^x$, on a :
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 33.23.
Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « exp l'emporte sur x ».

33.2 Applications

33.2.1 Seuil

1. Déterminer le plus grand réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :
$$ax \leqslant e^x.$$
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2.$$
3. *Moyenne arithmétique et géométrique, comparaison.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n)$ n réels positifs.
$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{(moyenne arithmétique)}$$
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad \text{(moyenne géométrique)}$$
Prouver que $G_n \leqslant A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer les entiers pour lesquels $2^n \geqslant n^2$.
5. Comparer π^e et e^π.

◊ *Solution.* 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction $h(x) = ax - \exp(x)$. On veut trouver le plus grand réel a tel que $ax - \exp(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On calcule la dérivée de la fonction h :
$$h'(x) = a - \exp(x).$$
On obtient :
$$\begin{aligned} &h'(x) = 0 \Leftrightarrow a - \exp(x) = 0 \Leftrightarrow a = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(a) \\ &h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \ln(a) \\ &h'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \ln(a) \end{aligned}$$
La fonction h est donc croissante quand $x < \ln(a)$ et décroissante quand $x > \ln(a)$. On a de plus :
$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$$
donc h admet donc un maximum en $x = \ln(a)$.
Il faut donc trouver a tel que $h(x) = ax - \exp(x) = 0$ en $x = \ln(a)$. C'est-à-dire :
$$h(\ln(a)) = a\ln(a) - \exp(\ln(a)) = a\ln(a) - a = a(\ln(a) - 1) = 0$$
Soit à résoudre :
$$a = 0 \quad \text{et} \quad \ln(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = e.$$
Or on a fait comme condition $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc la seule solution à notre problème est $a = e$.

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. En utilisant les propriétés de l'exponentielle, on peut transformer le membre de gauche de l'inégalité :
$$\frac{e^{x+y}}{xy} = \frac{e^x e^y}{xy} = \frac{e^x}{x} \times \frac{e^y}{y}.$$
Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est toujours supérieure à e pour $x > 0$. Calculons la dérivée f' de la fonction f :
$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}e^x$$
Comme $e^x > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de la dérivée f' de la fonction f est du signe de l'expression $\frac{x-1}{x^2}$, c'est-à-dire :
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{et} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$
La fonction f est donc décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. De plus :
$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (croissance comparée).}$$
Donc la fonction f admet un minimum en $x = 1$ et $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$. D'où :
$$\frac{e^x}{x} \geqslant e$$
pour tout $x > 0$ et ainsi :
$$\frac{e^x}{x} \times \frac{e^y}{y} \geqslant e \times e = e^2$$
pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
3. On étudie les variations de la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par :
$$f(x) = e^{x-1} - x.$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = e^{x-1} - 1.$$
On en déduit, par croissance du logarithme, que :
$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1.$$
D'où les variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	↘		0		↗

La fonction f admet donc, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 1 et :
$$f(1) = e^0 - 1 = 0.$$
Comme ce minimum est nul, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a bien :
$$e^{x-1} \geqslant x.$$

En spécialisant, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, l'inégalité précédente avec $x = \dfrac{a_i}{A_n}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{(a_i/A_n)-1} \geqslant \frac{a_i}{A_n}.$$

En multipliant, membre à membre les inégalités ci-dessus (tous les membres sont positifs), il vient :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(a_i/A_n)-1} \geqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_n}$$

et comme l'exponentielle transforme les sommes en produit, on peut écrire :

$$\mathrm{e}^{\sum_i (a_i/A_n)-1} \geqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{A_n^n}$$

$$\mathrm{e}^{(\sum_i a_i/A_n)-n} \geqslant \frac{G_n^n}{A_n^n}$$

et puisque $\sum\limits_i \frac{a_i}{A_n} - n = 0$, il vient :

$$1 \geqslant \frac{G_n^n}{A_n^n}.$$

On a donc :

$$A_n^n \geqslant G_n^n$$

Par croissance du logarithme ($A_n \geqslant 0$ et $G_n \geqslant 0$) :

$$\ln(A_n^n) \geqslant \ln(G_n^n).$$

D'après les propriétés du logarithme :

$$n \ln A_n \geqslant n \ln G_n.$$

Comme n est non nul :

$$\ln A_n \geqslant \ln G_n$$

Et enfin par croissance de l'exponentielle :

$$A_n \geqslant G_n.$$

4. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2^x) - \ln(x^2)$. D'après les règles de calculs sur les logarithmes :

$$f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x.$$

$$f(2) = \ln 4 - \ln 4 = 0 \quad \text{et} \quad f(4) = \ln 16 - \ln 16 = 0.$$

On a :

$$f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x}.$$

Comme $x > 0$, on a :

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \ln 2 - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{2}{\ln 2}.$$

On en déduit les variations de f :

x	0		2		$\dfrac{2}{\ln 2}$		4		$+\infty$
Signe de f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit : $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2;4]$.
On recherche maintenant les entiers n pour lesquels on a : $2^n \geqslant n^2$, c'est-à-dire $f(n) \geqslant 0$, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

5. La calculatrice donne :

$$\pi^{\mathrm{e}} \approx 22,46 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\pi} \approx 23,14 (\text{à } 10^{-2} \text{ près}).$$

On sait que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln x \leqslant x - 1.$$

En spécialisant $x = \frac{\pi}{\mathrm{e}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}}\right) &\leqslant \frac{\pi}{\mathrm{e}} - 1 \\ \ln \pi - 1 &\leqslant \frac{\pi - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e} \ln \pi - \mathrm{e} &\leqslant \pi - \mathrm{e} \\ \ln(\pi^{\mathrm{e}}) &\leqslant \pi \end{aligned}$$

D'où : $\pi^{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{\pi}$.

□

33.2.2 Exponentielles de base a

Définition 33.24.
Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre réel b, on pose :

$$a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}.$$

Remarques 33.25.

1. Cette définition donne un sens à une écriture telle que $\pi^{\sqrt{2}}$.
2. Elle est cohérente avec la puissance rationnelle d'un nombre $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 3}$. Or $\frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$ donc $3^{1/2} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exemples 33.26. *Sur calculatrice TI82*

```
> Pi^(V^(2))=e^(V^(2)*ln(Pi))
1
> Pi^(V^(2))
5.047487267
> e^(3*ln(2))
8
> (-3)^5
-243
> (-3)^(Pi)
ERR:REP NONREEL
1:Quitter [EXE]
> 3^(-Pi)
.0317014678
```

Propriété 33.27.
Pour tous nombres réels a et a' strictement positifs et tous nombres réels b et b' :

1. $\ln a^b = b \ln a$.
2. $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$.
3. $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$
4. $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$.
5. $(aa')^b = a^b a'^b$.
6. $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$.

Remarque 33.28.
Les propriétés des puissances d'exposants entiers s'étendent, pour les nombres strictement positifs, aux puissances d'exposants réels.

Exemples 33.29.

1. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^\pi = \dfrac{1}{2^\pi} = 2^{-\pi}$,
2. $3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}}$.

Définition 33.30. *Exponentielle de base a*
Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto a^x$ par $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. On l'appelle fonction *exponentielle de base a*.

Exemples 33.31.

1. La fonction $f : x \mapsto 5^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $5^x = \mathrm{e}^{x \ln 5}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \ln 5 \times \mathrm{e}^{x \ln 5} = \ln 5 \times 5^x.$$
2. La fonction $g : x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-x \ln 2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$g'(x) = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

On peut tracer le tableau de variations de $x \mapsto a^x$ en distinguant deux cas :

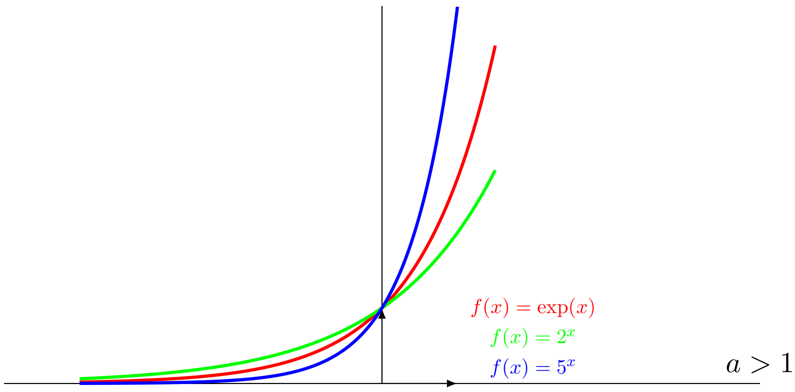
1. Si $0 < a < 1$:

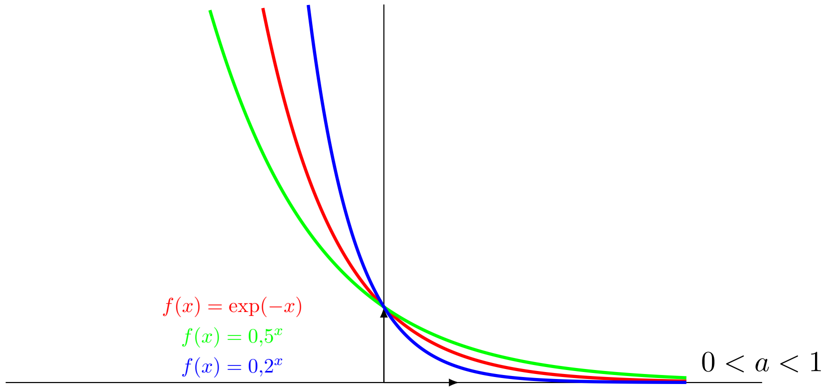
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
a^x	$+\infty$	1	a	0

2. Si $1 < a$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
a^x	0	1	a	$+\infty$

Puis les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ toujours en distinguant les deux cas :





33.3 Croissances comparées

33.3.1 Introduction

Rappel sur les formes indéterminées

Propriété 33.32.
Les formes indéterminées sont de quatre types :

1. du type $\infty - \infty$
2. du type $0 \times \infty$
3. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$
4. du type $\dfrac{0}{0}$

Croissance comparée, à quoi ça sert ?

Les croissances comparées permettent de lever ce genre d'indétermination. Elles interviennent quand on calcule une limite :

— d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et un logarithme ;

— d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et une exponentielle.

On établit donc un « rapport de force » entre ces classes de fonctions. On va dire qu'une classe de fonction tend plus au moins rapidement vers l'infini qu'une autre classe de fonction. Du plus fort au plus faible, on a :

— exponentielles ;

— puissances ;

— logarithmes.

Cela se voit encore mieux sur un graphique (voir la figure 34.1).

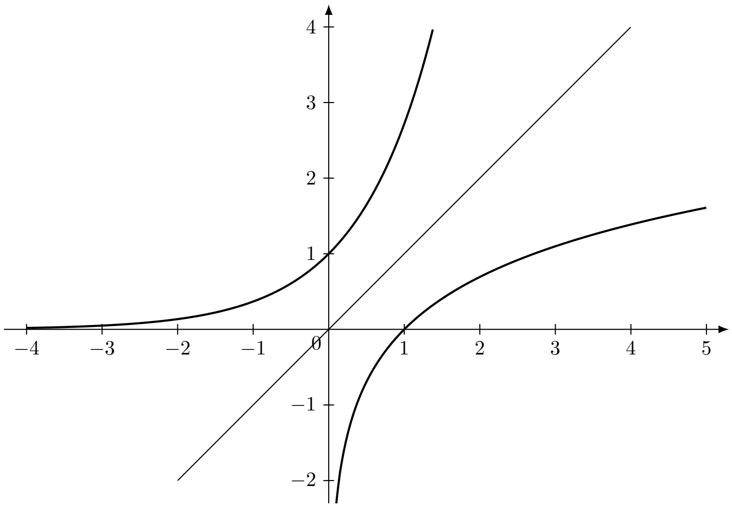


Figure 33.1 – Croissances comparées

33.3.2 Croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes

Théorème 33.33.

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$
2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$
3. $$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$
4. $$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0, \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

◊ *Démonstration du théorème 33.33.* On peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geqslant 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geqslant 2$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x \to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction ln en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction ln en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Corollaire 33.34.
Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

◊ *Démonstration du corollaire 33.34.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

Exemples 33.35.

1. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

On a :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

D'où par produit,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$

2. On veut étudier la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln \sqrt{x}}{x}.$$

En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X \to +\infty} 2 \frac{\ln X}{X} = 0.$$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0.$$

33.3.3 Croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles

(voir ci-dessus)

33.3.4 D'autres exemples

Exemples 33.36.

1. Soit à calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + x^2 + 1.$$
Ici, nous n'avons pas besoin des croissances comparées pour déterminer la limite car :
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$
et donc
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + x^2 + 1 = +\infty.$$
2. Soit à calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - x^2.$$
Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On remarque alors que :
$$\mathrm{e}^x - x^2 = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$$
Or, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$, ainsi
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - x^2 = +\infty.$$
3. Soit à calculer
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x}.$$
On rencontre donc une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$. On pose $u = \frac{1}{x}$, on a donc
$$\frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x} = u^2 \mathrm{e}^u.$$
On a
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
et, par croissances comparées, $\lim_{u \to -\infty} u^2 \mathrm{e}^u = 0$. Donc, par composition :
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{1/x} = 0.$$

33.3.5 Applications

Branches infinies des courbes des fonctions $\ln$ et $\exp$

Propriété 33.37.
Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes représentatives des fonctions ln et exp admettent des branches paraboliques de directions respectives $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$.

◊ *Démonstration de la propriété 34.32.* En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

□

Détermination de limites

Exemples 33.38.

1. Soit à calculer
$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$
Comme $x > 0$, on peut écrire :
$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$$
Or, par croissances comparées :
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$
Donc, par composition
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$
2. On considère la fonction définie sur $[0;1]$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
On veut étudier la dérivabilité de f en 0 et 1. On a :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0,$$
d'où
$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$
et
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty,$$
d'où
$$\lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$
Donc f est continue sur $[0;1]$, de plus elle est dérivable sur $]0;1[$ avec :
$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

donc f est non dérivable en 0. Puisque $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ alors,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

d'où $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, elle est donc dérivable à gauche en 1.

Une intégrale convergente

On considère l'intégrale (dépendant de x) :

$$\varphi(h) := \int_1^h t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

On montre que φ admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout réel x fixé, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est équivalent en $+\infty$ à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. On en déduit qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout $h > A$ on ait

$$0 \leqslant \varphi(h) \leqslant \int_A^h t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^h \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{h} + \frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{A}.$$

Donc φ est uniformément bornée, d'où le résultat.

LEÇON

34 Fonctions logarithmes.

Préambule

Niveau : première « Mathématiques Spécialité », terminale « Mathématiques Spécialité » et « Mathématiques Complémentaires »

Prérequis : fonctions exponentielles (voir la leçon n° 33), notions de dérivabilité, existence d'une solution d'équa diff, bijection, limites, théorème des valeurs intermédiaires, primitives, intégrales, théorème des accroissement finis, résolution d'une équation du second degré, théorème des gendarmes.

Références :

[1] G. Bontemps & al., *Fractale, Maths 1re S.* Bordas, Programme 2001.

[2] G. Costantini, *Exercices rédigés sur les exponentielles et les logarithmes.*

[3] G. Costantini, *Fonctions logarithmes.* Cours de Terminale S.

[4] J.-E. Visca, *Les croissances comparées.* [url].

[5] R. Galante, *Croissance comparée des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Application.* [url]

Cette leçon provient de la session 2022 : « n° 37 : Fonctions exponentielle et logarithme népérien ». Elle reprend uniquement la partie « Logarithmes ».

34.1 Fonctions logarithmes

34.1.1 Introduction de la fonction logarithme

Introduction du logarithme par les primitives

Théorème 34.1.
La fonction « inverse », définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une unique primitive F qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

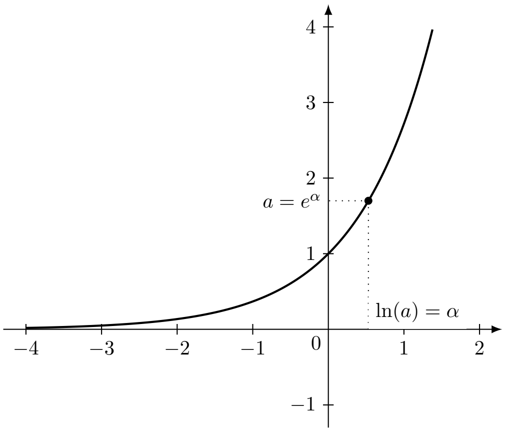
L'argument principal est que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition 34.2.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ (restriction de la fonction « inverse » à $]0;+\infty[$. La fonction *logarithme népérien* noté ln est *la* primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

Introduction du logarithme par l'exponentielle

Propriété 34.3.
Pour tout nombre réel a strictement positif, il existe un réel unique α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = a$. On appelle ce nombre *le logarithme népérien* de a. On le note $\ln a$.

◊ *Démonstration de la propriété 34.3.* La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $]0;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet des solutions. Or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il y a donc un et un seul nombre réel α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = a$. □



Exemples 34.4.

1. Le nombre α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = 3$ est $\ln 3$.
2. $\ln 5$ est le nombre dont l'image par la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est 5 ; ainsi $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$.

Conséquences des définitions du logarithme

On va se placer dans le cadre où on a introduit le logarithme par l'unique primitive F de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

On tire les conséquences suivantes :

1. La fonction primitive est définie sur le même intervalle que la fonction considérée, donc la fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$.
2. $\ln(1) = 0$.
3. la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$ puisque dérivable sur cet intervalle
4. La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puisque sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle, ce qui permet une première esquisse de son tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\dfrac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
variations de la fonction ln	‖	↗	0	↗	

5. Ainsi, nous en déduisons également le signe de la fonction ln :
   — $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,

— $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

— $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

6. La fonction ln étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur l'intervalle image. On en déduit que pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, on a :

   — $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$,

   — $\ln a < \ln a \Leftrightarrow a < b$.

   En effet, si $a = b$ alors il est clair que $\ln a = \ln b$. De même, si $a < b$ alors (stricte croissante du ln) $\ln a < \ln b$.

34.1.2 Des exemples

Exemples 34.5.

1. On veut déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par :

   — $f(x) = \ln(x+3)$

   — $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$.

   On pose $F(x) = x+3$ et $G(x) = x^2 - x - 2$. Les deux fonctions f et g sont définies si le logarithme des deux fonctions F et G sont définies, ce qui équivaut à la positivité stricte des deux fonctions F et G.

   — $F(x) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Donc f est définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

   — $G(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$. On résout $x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9$. Donc :

   $$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

   Or le signe du coefficient de x^2 est positif donc $G(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty;-1[\cup[2;+\infty]$. Donc g est définie sur l'intervalle $]-\infty;-1[\cup[2;+\infty]$.

2. On veut dériver la fonction f définie par $f(x) = 3 - x + \ln x$. La fonction f est dérivable car c'est une somme de fonctions dérivables. On rappelle que comme $x \mapsto \ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, la dérivée de la fonction logarithme est $x \mapsto \frac{1}{x}$. Donc :

   $$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}.$$

3. On veut résoudre l'équation $\ln(2x+1) = \ln(3-x)$. Ceci est équivalent à résoudre le système d'équation/inéquation suivant :

   $$\begin{cases} 2x+1 = 3-x \\ 2x+1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Or :

   $$2x+1 = 3-x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

   et on vérifie les deux autres conditions du système :

   $$2 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

   Donc la solution de l'équation proposée est $x = \frac{2}{3}$.

34.1.3 Théorème fondamental

Théorème 34.6.
Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

On dit que la fonction logarithme transforme les produits en somme.

◊ *Démonstration du théorème 34.6.* Pour tout réel a strictement positif, on pose la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$G(x) = \ln(ax).$$

La fonction G est dérivable (G est une composée de fonctions dérivables : $G = v \circ u$ avec $u(x) = ax$ et $v = \ln$) et :

$$G'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

La fonction G est donc une primitive de la fonction inverse tout comme la fonction ln. Elles diffèrent donc d'une constante c :

$$G(x) = \ln x + c \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln x + c.$$

On calcule la constante c, si $x = 1$, on a :

$$\ln a = \ln 1 + c = 0 + c,$$

d'où $c = \ln a$ et finalement :

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \qquad \text{pour tout réel } x \in]0;+\infty[.$$

□

Remarque 34.7.
Si a et b sont strictement négatifs, on a une relation analogue :

$$\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$$

et plus généralement, pour tout réels a et b de $\mathbb{R}^*$:

$$\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b|.$$

Conséquence 34.8.
Pour tous réels a et b strictement positifs :

1. $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$,
2. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
3. $\ln a^p = p \ln a$, $(p \in \mathbb{Z})$,
4. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

◊ *Démonstration de la conséquence 34.8.* 1. $0 = \ln 1 = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ d'où $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.

2. $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Si $p > 0$ alors
$$\ln a^p = \ln(a \times a \times \cdots \times a) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = p \ln a.$$
Si $p < 0$ alors
$$\ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln(a^{-p}) = -(-p)\ln a = p \ln a.$$
4. Voir la section 33.2.2.

□

34.1.4 Etude de la fonction ln

Limites aux bornes de l'ensemble de définition $]0;+\infty[$

Théorème 34.9.
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
où $x \to 0^+$ signifie x tend vers 0 par valeurs supérieures.

◊ *Démonstration du théorème 34.9.* On établit le deuxième résultat. Soit p un entier naturel. On a $\ln 2^p = p \ln 2$. D'où :
$$\lim_{p \to +\infty} \ln 2^p = \lim_{p \to +\infty} p \ln 2 = +\infty.$$
Soit x un nombre réel tel que $x \geqslant 2^p$. La fonction ln est strictement croissante, donc $\ln x \geqslant \ln 2^p$. On passe à la limite :
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x \geqslant \lim_{p \to +\infty} \ln 2^p.$$
Or, $\lim_{p \to +\infty} \ln 2^p = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Le premier résultat en découle simplement par changement de variable :
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x \to +\infty} \ln x = -\infty.$$

□

Théorème 34.10.
La fonction ln est une bijection (strictement croissante) de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

◊ *Démonstration du théorème 34.10.* La stricte croissance et la bijectivité ont déjà été établies. En outre, comme
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
et comme la fonction ln est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $-\infty$ et $+\infty$. l'intervalle image de $]0;+\infty[$ par la fonction ln est donc $\mathbb{R}$. □

Le nombre e

Puisque la fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, pour tout réel $\ln x = \lambda$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.

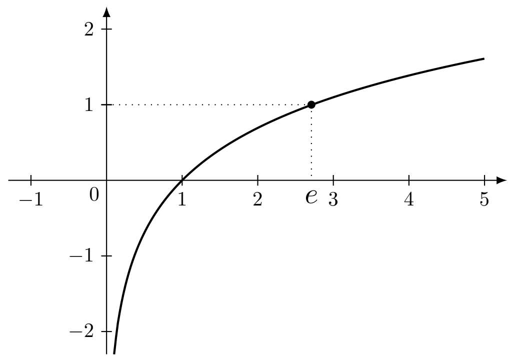
Définition 34.11. *Base du logarithme népérien*
On note e l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. Ce nombre e s'appelle *base* du logarithme népérien.

On a donc $\ln \mathrm{e} = 1$ et par la calculatrice, on obtient $\mathrm{e} \approx 2{,}718\dots$. Plus généralement, $\ln \mathrm{e}^p = p \ln \mathrm{e} = p$.

Exemple 34.12.
Soit à résoudre $\ln(x+3) = 9$, pour $x > -3$:

$$\ln(x+3) = \ln \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x+3 = \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^9 - 3 \approx 8100.$$

Représentation graphique de la fonction ln



34.1.5 Limites de références

Lemme 34.13.
La représentation graphique de la fonction ln est toujours située sous la première bissectrice $(y = x)$:

$$\ln x < x \text{ pour tout } x > 0.$$

◊ *Démonstration du lemme 34.13.* On considère la fonction f définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$. Sa dérivée f' est définie sur I par :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$ d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
signe de f'	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum m strictement positif en 1 :

$$m = f(1) = 1 - \ln 0 = 1.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement positive pour tout réel x positif, d'où le lemme. □

Remarque 34.14.
On a même $\ln x \leqslant x - 1$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Théorème 34.15.

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$
2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad (\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*).$$
3. $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$
4. $$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0, \quad (\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*).$$
5. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

◊ *Démonstration du théorème 34.15.* D'après le lemme précédent, on peut écrire, pour tout $x > 0$: $\ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$:

$$\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$$

et pour $x > 1$, on a :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geqslant 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\frac{\ln x}{x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On établit maintenant la limite suivante à l'aide du changement de variable du type $X = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

d'après ce qui précède. On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geqslant 2$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} x \ln x = 0$$

car $\lim_{x\to 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Enfin, pour la dernière limite, on reconnaît l'accroissement moyen de la fonction ln en $x_0 = 1$ La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction ln en x_0 soit $\frac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Remarque 34.16.
La dernière limite peut s'écrire sous d'autres formes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Corollaire 34.17.
Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

◊ *Démonstration du corollaire 34.17.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$). Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. □

Exemples 34.18.

1. On veut étudier la limite suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$
On a :
$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}.$$
Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$
D'où par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0.$$
2. On veut étudier la limite suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$
En remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, nous avons :
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x}.$$
En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0.$$
Par un raisonnement analogue, on peut montrer que :
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$$

34.1.6 Dérivées et primitives

Théorème 34.19.
Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par $\ln u$ est dérivable sur I et :
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

C'est une conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée.

Théorème 34.20.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.

Pour la démonstration de ce théorème, on peut utiliser le précédent en dérivant $\ln|u|$. On distinguera les intervalles où $u > 0$ de ceux où $u < 0$.

Exemple 34.21.
On veut dériver sur $]0;+\infty[$ la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x).$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}.$$

34.2 Applications

34.2.1 Le logarithme n'est pas une fonction rationnelle

Proposition 34.22.
La fonction logarithme népérien n'est pas une fonction rationnelle.

Démonstration. ◊ Supposons que $\ln(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q étant des polynômes. Par $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\deg P \geqslant \deg Q + 1$. Or $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{P(x)}{xQ(x)}$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \neq 0$ car $\deg P \geqslant \deg xQ$. C'est absurde. □

Remarque 34.23.
On peut simplifier la démonstration sans utiliser les croissances comparées. On raisonne toujours par l'absurde en supposant que $\ln = \frac{P}{Q}$ avec P et Q deux polynômes premiers enter eux. En dérivant membre à membre on obtient :

$$\frac{1}{X} = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \Leftrightarrow Q^2 = XP'Q - XQ'P.$$

34.2.2 Image d'une suite géométrique

Proposition 34.24.
L'image d'une suite géométrique de raison $r > 0$ par la fonction logarithme est une suite arithmétique de raison $\ln r$.

Démonstration. ◊ La preuve est immédiate en utilisant les propriétés algébriques du logarithme. □

34.2.3 Approximation du logarithme népérien d'un réel

Proposition 34.25.
Soit $a > 1$ et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Alors la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout $n \geqslant 0$, $v_n = 2^n(u_n - 1)$ converge vers $\ln a$.

Démonstration. ◊ On montre tout d'abord que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.

$$\forall n > 0, \quad u_{n+1} - 1 = \sqrt{u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1).$$

D'où, pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (x-1)$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Montrons que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ln(a)$. En étudiant les fonctions $f\colon h \mapsto h - \frac{h^2}{2} \leqslant \ln(1+h)$ et $g\colon h \mapsto h \leqslant \ln(1+h)$, on montre que :

$$\forall h > 0, h - \frac{h^2}{2} \leqslant \ln(1+h) \leqslant h.$$

De cette inégalité, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad -\frac{(a-1)^2}{2^{n+1}} \leqslant \ln(a) - v_n \leqslant 0.$$

Ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. □

34.3 Croissances comparées

34.3.1 Introduction

Rappel sur les formes indéterminées

Propriété 34.26.
Les formes indéterminées sont de quatre types :

1. du type $\infty - \infty$
2. du type $0 \times \infty$
3. du type $\frac{\infty}{\infty}$
4. du type $\frac{0}{0}$

Croissance comparée, à quoi ça sert ?

Les croissances comparées permettent de lever ce genre d'indétermination. Elles interviennent quand on calcule une limite :

— d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et un logarithme ;

— d'un rapport ou un produit d'une fonction puissance et une exponentielle.

On établit donc un « rapport de force » entre ces classes de fonctions. On va dire qu'une classe de fonction tend plus au moins rapidement vers l'infini qu'une autre classe de fonction. Du plus fort au plus faible, on a :

— exponentielles ;

— puissances ;

— logarithmes.

Cela se voit encore mieux sur un graphique (voir la figure 34.1).

34.3.2 Croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes

(voir ci-dessus)

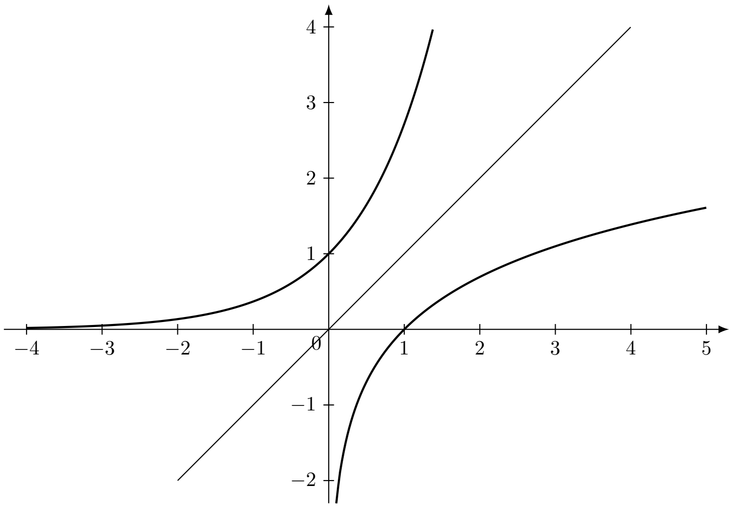


Figure 34.1 – Croissances comparées

34.3.3 Croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles

Propriété 34.27. *Limites fondamentales*

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$,
2. $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$.

◊ *Démonstration de la propriété 34.27.* Dans la démonstration de la propriété 33.15, on a vu que, pour tout x, $e^x \geqslant x$. Donc, pour tout x, $e^{x/2} \geqslant \frac{x}{2}$ et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$(e^{x/2})^2 \geqslant \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

soit $e^x \geqslant \frac{x^2}{4}$. Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$. D'après un des « théorèmes des gendarmes », on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

On a $x e^x = \frac{x}{e^{-x}}$. En posant $X = -x$, on a $x e^x = -\frac{X}{e^X}$. Or

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

et, par suite, $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$. □

Conséquence 34.28.
Pour tout nombre entier n strictement positif :

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

♢ *Démonstration de la conséquence 34.28.* 1. Comme $e^x > 0$:

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{x}\right)^n$$

soit

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{nx}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} = +\infty.$$

En composant avec la fonction puissance, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

2. On pose $x = -X$, $x^n e^x = (-X)^n e^{-X}$, soit $x^n e^x = (-1)^n \frac{X^n}{e^x}$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X}.$$

On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc

$$\lim_{X\to+\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X} = 0.$$

D'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$

□

Exemples 34.29.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^{10}}$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Soit $g : x \mapsto x^{1000} e^x$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Remarque 34.30.
Pour les limites en $+\infty$ et et en $-\infty$, on retiendra que « exp l'emporte sur x ».

34.3.4 D'autres exemples

Exemples 34.31.

1. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1.$$

Ici, on tombe sur une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On remarque alors que :

$$\ln(x) - x^2 + 2x + 1 = x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1 = -\infty.$$

2. Soit à calculer

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}.$$

On rencontre donc une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$. On pose $u = \frac{1}{x}$, on a donc

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = u^2\mathrm{e}^u.$$

On a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

et, par croissances comparées, $\lim_{u\to-\infty} u^2\mathrm{e}^u = 0$. Donc, par composition :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} = 0.$$

34.3.5 Applications

Branches infinies des courbes des fonctions ln **et** exp

Propriété 34.32.
Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les courbes représentatives des fonctions ln et exp admettent des branches paraboliques de directions respectives $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$.

◊ *Démonstration de la propriété 34.32.* En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

□

Détermination de limites

Exemples 34.33.

1. Soit à calculer

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Comme $x > 0$, on peut écrire :

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$$

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

Donc, par composition

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

2. Soit à calculer

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{(\ln x)^{-\alpha}}, \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

On a tout d'abord :

$$\ln(x)^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha\ln(\ln(x))}$$

et ainsi :

$$(\ln(x))^{(\ln x)^{-\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha \ln(\ln(x))} \ln(\ln(x))}$$

Or, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} -\alpha \ln\ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$$

mais par croissances comparées, « l'exponentielle l'emporte sur le logarithme » donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha \ln(\ln(x))} \ln(\ln(x)) = 0$$

et par composition

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^{(\ln(x))^{-\alpha}} = 1.$$

3. On considère la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On veut étudier la dérivabilité de f en 0 et 1. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 1$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty,$$

d'où

$$\lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$

Donc f est continue sur $[0;1]$, de plus elle est dérivable sur $]0;1[$ avec :

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

donc f est non dérivable en 0. Puisque $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ alors,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(\ln x)^2} \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

d'où $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, elle est donc dérivable à gauche en 1.

LEÇON

35 Fonctions convexes.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Terminale Maths Spécialité et Complémentaires

Prérequis : Outils de l'étude de fonctions : définition, sens de variations, dérivation.

Références :

[1] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Spécialité*, Magnard 2020. [url]

[2] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Complémentaires*, Magnard 2020. [url]

[3] M. Derrien, *Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse*, ENS Rennes. [url]

[4] A. Hirschowitz, *Convexité*, Mars 2011. [url]

[5] E. Miquey, *Convexité*, Atelier Maths JPS - 10 Janvier 2011. [url]

[6] Y. Monka, *Convexité*, Terminale ES-L, Académie de Strasbourg. www.maths-et-tiques.fr [url]

[7] Mr Cerisier & Mme Roussenaly, *Chapitre 3 : Convexité, Terminale ES-L*, LGT Mansart, 2015-16. [url]

[8] B. Ycart, *Dérivabilité et convexité*, Université Joseph Fourier, Grenoble, Maths en Ligne. [url]

[9] A. Fontaine, *Chapitre 8 : Dérivabilité et convexité*, Cours de mathématiques, ECT 1ère année. [url]

[10] E. Angelini, *Chp. 9. Convexité*, Université Paris Dauphine, iup.gmi, G.L. cours, 02/05. [url]

[11] *Document 33 : Fonctions convexes*, CAPES de Mathématiques à l'Université Lyon-1. [url]

35.1 Convexité d'une fonction

35.1.1 Sécante et convexité

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [5] [6] [7] [9] [10]

35.1.2 Convexité de fonctions usuelles

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [4] [5] [6] [7]

35.1.3 Propriétés sur la convexité

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [4] [5] [8] [10] [11]

35.2 Convexité et dérivation

35.2.1 Concavité et dérivée première

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11]

35.2.2 Concavité et dérivée seconde

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11]

35.3 Tangente et points d'inflexion

35.3.1 Tangente

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [7] [9]

35.3.2 Point d'inflexion

[1, cours Ch.5] [2, cours Ch.3] [6] [7] [9]

35.4 Applications

35.4.1 Convexité en topologie

[3]

35.4.2 Convexité et optimisation

[3] [8] [10] [11]

35.4.3 Convexité et inégalité

[3] [5] [10] [11]

35.4.4 Convexité et intégrale

[11]

LEÇON

36

Primitives, équations différentielles.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Terminale Spécialité (ou Complémentaires), Terminale STI2D (ancien programme).

Prérequis : fonctions dérivées, fonctions exponentielles et fonctions trigonométriques, calcul intégral.

Références :

[1] Manuel Sesamath, *Terminale Spécialité*, Magnard 2020. [url]

[2] Y. Monka, *Primitives et équations différentielles*, Maths-et-tiques. [url]

[3] C. Rossignol, *Primitives, équations différentielles*, Année scolaire 2020/2021. [url]

[4] L. Devilliers, *Chapitre 4 : Primitives et équations différentielles*, PCSI du Lycée Lavoisier, 22-23, Cours. [url]

[5] A. Excellent-Savart & al., *Maths Term STI2D/STL*, Hachette Éducation, 2012.

[6] P. Taquet & al., *Mathématiques, BTS Groupement A*, Hachette Technique, 2010.

[7] C. Boulonne, *Les leçons de mathématiques à l'oral du CAPES*, Proposition de plan et références bibliographiques, Session 2011.

36.1 Définition d'une équation différentielle

[1] [2] [3]

36.2 Un exemple de base : les primitives

[1] [2] [3]

36.3 Résolution d'équations différentielles

On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles de type suivant (y étant une fonction de la variable réelle x définie et une (ou deux) fois dérivable) :

— (1) : $y' = ay$ où a est un nombre réel ;

— (2) : $y' = ay + b$ où a et b sont deux nombres réels avec $a \neq 0$;

— (3) : $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un nombre réel non nul.

36.3.1 Résolution de l'équation différentielle du type (1)

[1] [2] [3]

36.3.2 Résolution de l'équation différentielle du type (2)

[1] [2] [3]

36.3.3 Résolution de l'équation différentielle du type (3)

[5] (ancien programme STI2D)

36.4 Applications

36.4.1 Utilisation des primitives pour le calcul intégral

[2]

36.4.2 Modélisation de phénomènes par des équations différentielles

[2 p 221 & p 223-226] [7, leçon n° 58 p 465]

36.5 Compléments

[4] [6]

36.5.1 Résolution générale d'équations différentielles de premier ordre

On s'intéresse à la résolution des équations différentielles du type $a(t)y' + b(t)y = 0$ où a et b sont des fonctions de la variable t dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in i$.

Puis plus généralement, on s'intéresse à la résolution des équations différentielles du type $a(t)y' + b(t)y = 0$ où a, b et c sont des fonctions de la variable t dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in i$.

36.5.2 Équations linéaires du second ordre à coefficients réels ou complexes

LEÇON

37

Intégrales, primitives.

Préambule

Niveau : terminale « Mathématiques Spécialité » et terminale « Mathématiques Complémentaires »

Prérequis : fonctions dérivées, étude de fonctions, fonctions exponentielles et logarithmes.

Références :

[1] G. Bontemps & al., *Fractale, Maths 1re S.* Bordas, Programme 2001.

37.1 Primitives d'une fonction

37.1.1 Définitions et propriétés

Définition 37.1. *Primitive d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur I, une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout x appartient à I, $F'(x) = f(x)$.

Exemples 37.2.

1. $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^3$ puisque $F'(x) = f(x)$.
2. $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque sur $F'(x) = f(x)$.

Théorème 37.3.
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple 37.4.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), donc elle admet des primitives.

Propriété 37.5.
Soit F une primitive de f sur un intervalle I.

— Pour tout nombre k, $x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.

— Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.

◊ *Démonstration de la propriété 37.5.* — Soit k un réel et H la fonction définie sur I par $H(x) = F(x) + k$. H est dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables et, pour tout x de I,

$$H'(x) = F'(x).$$

Puisque F est une primitive de f, on a : $F'(x) = f(x)$ donc $H'(x) = f(x)$: H est une primitive de f sur I.

— Soit G une primitive de f sur I. La fonction $G - F$ est dérivable et

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$$

puisque, pour tout x de I,

$$G'(x) = f(x) = F'(x).$$

Donc $G - F$ est une fonction constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k tel que, pour tout x de I, $G(x) - F(x) = k$.

□

Exemple 37.6.
La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est une primitive de $f : x \mapsto 2 \sin x \cos x$.

Les fonctions $x \mapsto \sin^2 x + \sqrt{2}$, $x \mapsto \sin^2 x - 1$, $x \mapsto -\cos^2 x$... sont aussi des primitives de f.

Propriété 37.7.
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Un réel x_0 de I et un réel y_0 étant donnés (appelés « conditions initiales »), il existe une *unique primitive* F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

◊ *Démonstration de la propriété 37.7.* f admet des primitives sur I qui s'écrivent sous la forme $x \mapsto G(x) + k$ où G est l'une de ces primitives. La condition $F(x_0) = y_0$ conduit à $G(x_0) + k = y_0$. D'où

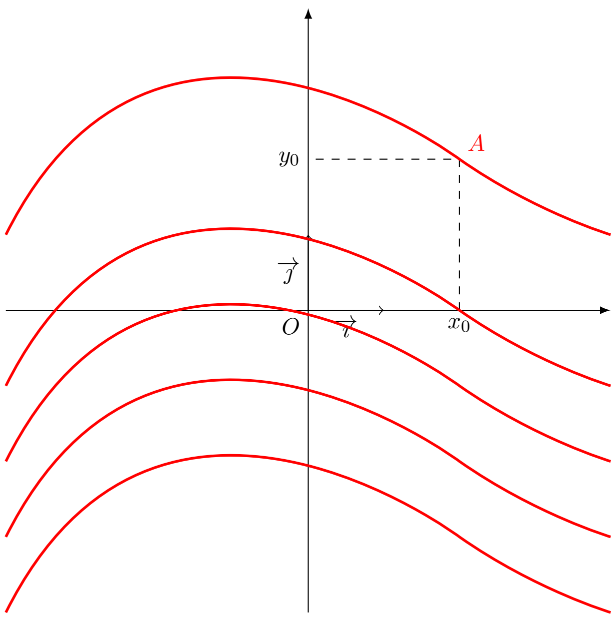
$$k = y_0 - G(x_0) \quad \text{et} \quad F : x \mapsto G(x) + y_0 - G(x_0).$$

F est l'unique primitive de f sur I vérifiant la condition. □

Pour une représentation graphique des primitives :

— les courbes de primitives de la fonction f sur I se déduisent l'une de l'autre par des translations de vecteur $\vec{v}(0, k)$.

— Pour tout point $A(x_0, y_0)$ avec $x_0 \in I$ (situé dans la bande), il existe une primitive unique dont la courbe représentative passa par A.



37.1.2 Tableaux de primitives et opérations sur les primitives

Les résultats du tableau 37.1 s'établissent en vérifiant que l'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive F ($c =$ constante)	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n = -1$)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0 \text{ ;} \\ ]-\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[& \text{si } n \leqslant -2 \end{cases}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$)	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0; +\infty[$

Table 37.1 – Tableau des primitives usuelles

On considère dans le tableau 37.2 des fonctions u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leqslant 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{v'}{v^2}$	$-\dfrac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\begin{cases} \ln u \\ \ln(-u) \end{cases}$	$\begin{cases} \text{si } u > 0 \text{ sur } I \\ \text{si } u < 0 \text{ sur } I \end{cases}$
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

Table 37.2 – Opérations sur les primitives

37.2 Intégrale et aire

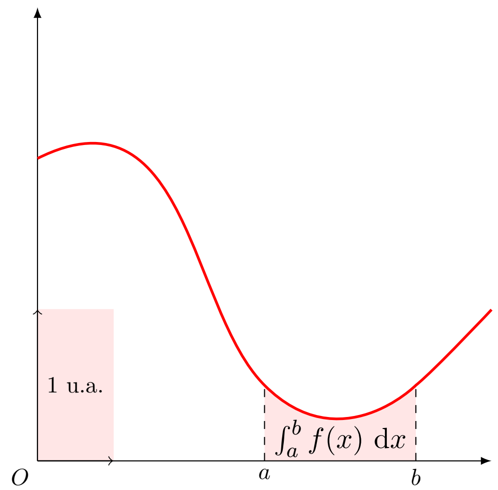
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, non nécessairement orthonormal.

Définition 37.8. *Aire sous la courbe*

Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. *L'aire sous la courbe* $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ est l'aire du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette aire et on lit *l'intégrale* (ou somme) de a à b de f.

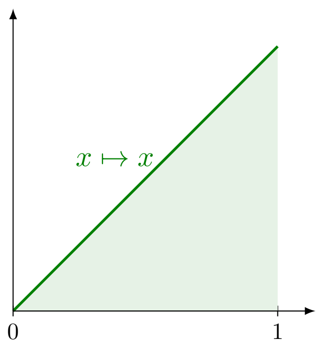
Remarques 37.9.

1. Le domaine $\mathscr{D}$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
2. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est exprimée en unité d'aire ; une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

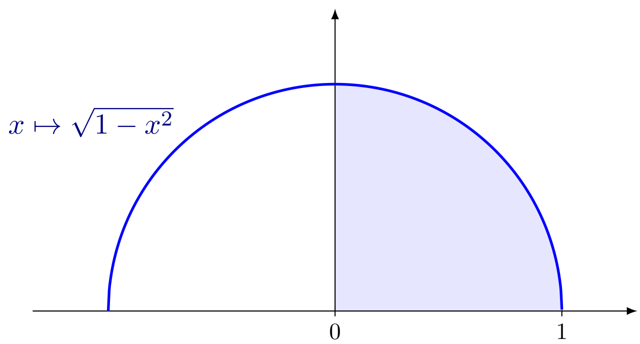


Exemples 37.10.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ car l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$ est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit ont pour mesure 1.
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ car l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.



$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

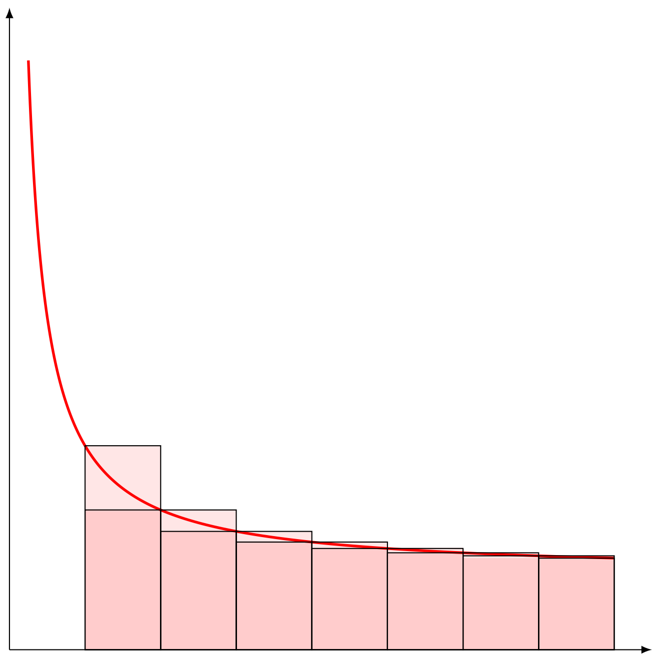
Propriété 37.11.
Soit une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ est égale à la limite commune des deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier n non nul, on divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. u_n correspond à l'aire des rectangles sous la courbe. v_n correspond à l'aire des rectangles au-dessus de la courbe. Pour tout n, on a :

$$u_n \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant v_n.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre l'aire des deux séries de rectangles et l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ diminue.



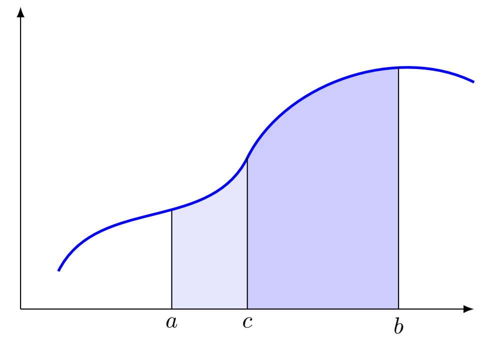
Remarques 37.12.

1. La propriété se généralise si f est seulement continue sur l'intervalle $[a,b]$.
2. Si la fonction f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a,b]$, on peut construire les deux suites de la même façon, mais c'est alors v_n qui correspond à l'aire des rectangles sous la courbe.

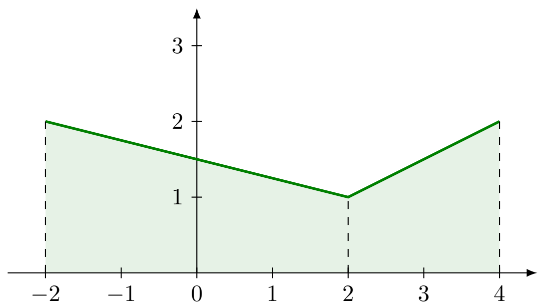
Propriété 37.13. *Relation de Chasles, pour les aires*
Soit une fonction f, continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Pour tout nombre c appartenant à l'intervalle $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On découpe l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ en aires sous la courbe sur les intervalles $[a;c]$ et $[c;b]$.



Exemple 37.14.
Soit la fonction f dont la courbe représentative est donnée en figure ci-dessous.



Alors :

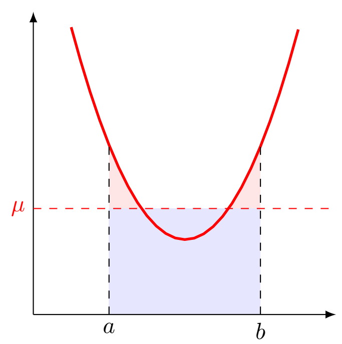
$$\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\times(2-1)}{2} + \frac{2\times(2-1)}{2} = 2+1 = 3$$

(en ajoutant les aires des deux trapèzes).

Définition 37.15. *Valeur moyenne*
Soit une fonction f, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La valeur moyenne de la fonction f correspond à la valeur qu'il faut donner à une fonction constante g sur l'intervalle $[a;b]$ pour que l'aire sous la courbe représentative de g soit égale à l'aire sous la courbe représentative de f. L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle coloré.



Définition 37.16.

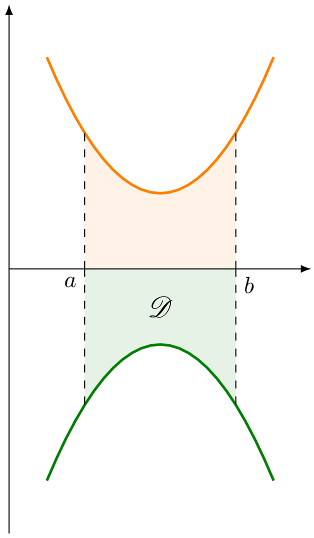
Soit une fonction f continue et *négative* sur l'intervalle $[a;b]$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égal à *l'opposé* de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété 37.17.

Soit une fonction f, continue et négative sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration de la propriété 37.17. $\mathscr{C}_{-f}$, la courbe représentative de la fonction $-f$, est symétrique par rapport à l'axe des abscisses de $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale, par symétrie, à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{-f}$. Cette aire est donc $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la définition 37.16, elle est aussi égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



□

Propriété 37.18.

Soit une fonction f continue et négative sur l'intervalle $[a;b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ est égale à :

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 37.19.

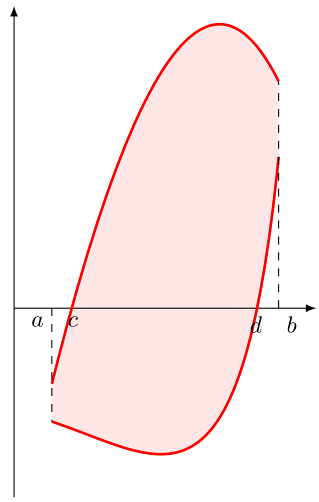
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = -x^2$. Sachant que $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,1]$ est $-\dfrac{1}{3}$.

Propriété 37.20.

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $f > g$. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par les deux courbes représentatives des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

◊ *Démonstration de la propriété 37.20.* On découpe l'intervalle $[a;b]$ selon que les fonctions f et g sont toutes deux du même signes ou de signe contraire.



Ainsi, dans la figure ci-dessus, l'aire entre les deux courbes est :

— sur l'intervalle $[a;c]$:
$$-\int_a^c -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
— sur l'intervalle $[c;d]$:
$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d -g(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$
— sur l'intervalle $[d;b]$:
$$\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient bien
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
pour la valeur de l'aire du domaine $\mathscr{D}$. □

37.3 Intégrale et primitive

Propriété 37.21.
Soit une fonction f continue, positive sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. L'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f sur l'intervalle $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unité d'aire à $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a;b]$.

◊ *Démonstration de la propriété 37.21.* La démonstration est faite dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $[a;b]$. On admettra le résultat dans le cas général. Pour tout x tel que $a \leqslant x \leqslant b$, on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$. Pour $h > 0$:
$$hf(x) \leqslant \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x) \leqslant hf(x+h)$$
soit
$$f(x) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Pour $h < 0$:

$$(-h)f(x+h) \leqslant \mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(x+h) \leqslant (-h)f(x).$$

soit

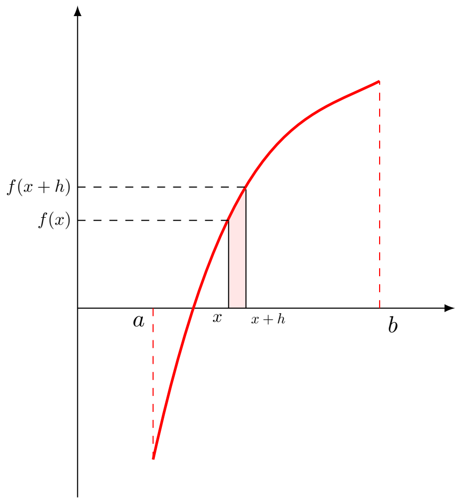
$$f(x+h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant f(x).$$

Ainsi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} = f(x).$$

La fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable pour tout x de l'intervalle $[a;b]$ et sa dérivée est la fonction f. De plus, $\mathscr{A}(a) = 0$. Ainsi $\mathscr{A}$ est la primitive de f nulle en a. Soit F une primitive quelconque de f, on peut donc écrire $\mathscr{A}(x) = F(x) - F(a)$. L'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a;b]$ vérifie donc :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$



□

Remarques 37.22.

1. On utilise la notation :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. On a les égalités :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a -f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples 37.23.

1. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, sur l'intervalle $[-1;2]$ est :

$$\int_{-1}^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6.$$

2. L'aire sous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[0;1]$ est :

$$\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

3. L'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;2]$ est :

$$-\int_1^2 -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Définition 37.24.
Soit une fonction f continue sur un intervalle I et a un élément de I. Pour tout x appartenant à I, la fonction définie par $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est *l'unique primitive* de f sur I s'annulant en a. Si F est une primitive quelconque de f sur I, alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Remarque 37.25.
Si $x > a$ et f positive sur l'intervalle $[a;x]$, alors $F(x)$ peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a;x]$, exprimée en unité d'aire. Quels que soient a et b, éléments de I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemples 37.26.
1. Sur $\mathbb{R}$,
$$\int_a^x 1\,\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{d}t = [t]_a^x = x - a.$$
2. Sur $\mathbb{R}$,
$$\int_0^x -t^2\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = -\frac{1}{3}x^3.$$
3. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$:
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln x]_1^x = \ln x.$$
4. Sur $\mathbb{R}$:
$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = \mathrm{e}^x - 1.$$

37.4 Propriétés algébriques de l'intégrale

Propriété 37.27. *Relation de Chasles*
Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Quels que soient a, b et c éléments de I :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 37.28.
Cette propriété prolonge la propriété 37.21, qui a été établie dans le cas où les intégrales correspondent à des aires.

Exemple 37.29.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (|2-t| + |1-t|)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3-2t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 (2t-3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[3t - t^2\right]_0^1 + [t]_1^2 + \left[t^2 - 3t\right]_2^3 = 2 + 1 + 2 = 5.\end{aligned}$$

Propriété 37.30. *Linéarité de l'intégrale*
Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, a et b des éléments de I, et α et β deux nombres réels. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 37.31.

$$\int_0^{\pi/4} (\tan^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}u = [\tan u]_0^{\pi/4} - [u]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Propriété 37.32. *Fonctions paires et impaires*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0. Pour tout élément a de I :

— si f est paire : $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

— si f est impaire : $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

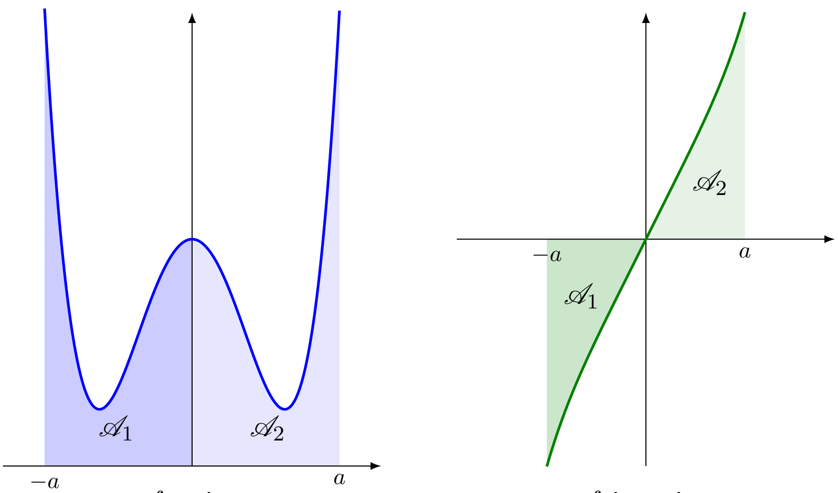
L'interprétation graphique est la suivante :

— Si f est paire et positive sur l'intervalle $[0;a]$, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales. Donc :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 2\mathscr{A}_2 = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

— Si f est impaire et positive sur l'intervalle $[0;a]$, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales. Donc :

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 0.$$



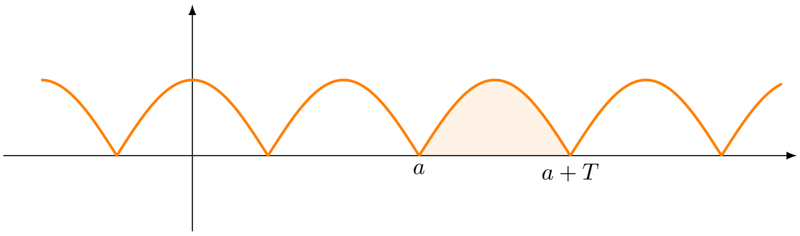
f paire $\qquad$ f impaire

Propriété 37.33. *Fonctions périodiques*
Soit f une continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. Pour tout nombre réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Si f est positive, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a; a+T]$. Par translations des domaines correspondants, on retrouve l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0; T]$.

— Si f est négative, on retrouve le résultat en considérant la fonction $-f$.



37.5 Intégrale et inégalités

Propriété 37.34.
Soit une fonction f continue positive sur un intervalle $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Remarques 37.35.

1. Ce résultat est immédiat, puisque $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est, par définition, l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a; b]$.
2. On peut retrouver le résultat à partir de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur l'intervalle $[a; b]$. D'où $F' = f$, or f est positive, donc F est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ et $F(b) \geqslant F(a)$.
3. **Attention !** Une fonction f peut très bien avoir une intégrale positive sur l'intervalle $[a; b]$, sans être elle-même positive sur tout cet intervalle.

Propriété 37.36.
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Si $f \leqslant g$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 37.37.
On applique la propriété 37.34 à la fonction $g - f$ qui est positive, ainsi que la propriété de linéarité de l'intégrale.

Propriété 37.38. *Inégalité de la moyenne*
Soit une fonction f continue sur un intervalle I.

— Si les réels m et M sont tels que, pour tout x de l'intervalle I, on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors si $I = [a, b]$ avec $a < b$:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

— Si le réel M est tel que, pour tout x de l'intervalle I, on a $0 \leqslant |f(x)| \leqslant M$, alors pour tous éléments a et b de I :

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

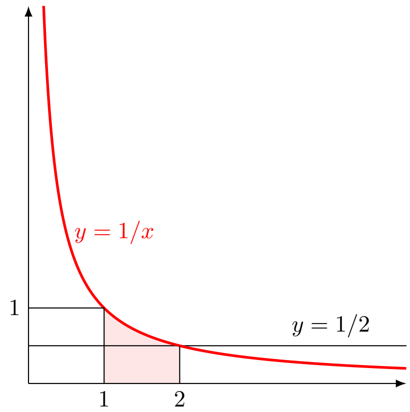
Remarques 37.39.

1. Dans le premier cas, on applique la propriété 37.36 à l'inégalité $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sur l'intervalle $[a; b]$.
2. Dans le second cas, on applique la propriété 37.36 à l'inégalité $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ sur l'intervalle $[a; b]$ ou $[b; a]$ selon que $a < b$ ou $a > b$.

Exemple 37.40.
Soit la fonction inverse sur l'intervalle $[1; 2]$. On a : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$, d'où

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant 1,$$

soit $\frac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant 1$.



Définition 37.41. *Valeur moyenne*
Soit une fonction f, continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Remarque 37.42.
Cette définition généralise la notion de valeur moyenne d'une fonction dans le cas où l'intégrale définissait une aire. Cette fois-ci, la formule est valable dans le cas où celle-ci a un signe non constant sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemples 37.43.

1. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$ est :
$$\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[-\cos \pi\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$
2. La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ est 0.
3. La valeur moyenne de la fonction définie par $x \mapsto x^2 - 1$ sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ est :
$$\frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} (x^2 - 1) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-3/2}^{3/2} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{3/2} = -\frac{1}{4}.$$

LEÇON

38

Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).

Préambule

Niveau : terminale « Mathématiques Spécialité »

Prérequis : intégrales, accroissements finis, primitives, propriétés sur l'intégrale, trigonométrie, fonction polynôme, fonction exponentielle

Références :

[1] G. Costantini, *Calcul intégral*. Cours de Terminale S.

[2] D. Arnaud & al, *Manuel Sesamaths, TS*. Magnard 2016.

[3] *Leçon 84 : Calcul approché d'intégrales*. Université Claude Bernard-Lyon I. CAPES de Mathématiques : Oral. Année 2004-2005. [url]

[4] M. Lezen, *Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou deux exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice*, 2011. [url]

[5] F. Thirioux, *BTS Electrotechnique Cours de Mathématiques*. Lycée René Perrin, Ugine.

[6] C. Cherruau & F. Cherruau, *Maths, BTS Groupement A*. Contrôle Continue Ellipses.

38.1 Sommes de Riemann

Soit f une application continue définie sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\sigma = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$ (c'est-à-dire $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$), h est le pas de la subdivision σ ($h = \max(a_{i+1} - a_i)$) et pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

Définition 38.1. *Somme de Riemann*

On appelle *somme de Riemann* associée à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0\leqslant i\leqslant n})$ le réel :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i).$$

Comme $h = \max(a_{i+1} - a_i)$, quand h devient très petit (tend vers 0), la subdivision devient de plus en plus fine et la somme de Riemann associé à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0\leqslant i\leqslant n})$ converge vers l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

Théorème 38.2.

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. ♢ Montrons que la différence suivante peut être rendue aussi petite que voulue :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x)-f(\xi_i))\right).\end{aligned}$$

En passant aux valeurs absolues, on a la majoration suivante :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x)-f(\xi_i)|\,\mathrm{d}x\right).$$

Or, du théorème de Heine appliqué à f continue sur le segment $[a,b]$, on déduit f uniformément continue sur $[a,b]$ (et donc aussi sur chaque $[a_{i+1},a_i]$, c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall(x,y)\in[a,b]^2,\quad (|x-y|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

Pour une subdivision σ de pas h tel que $0<h<\eta$, on aura :

$$\forall x\in[a_i,a_{i+1}],\quad |x-\xi_i|\leqslant a_{i+1}-a_i\leqslant h<\eta.$$

Ce qui entraînera :

$$|f(x)-f(\xi_i)|\leqslant\varepsilon.$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varepsilon\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon(a_{i+1}-a_i) = \varepsilon(b-a).$$

Ceci prouve bien que :

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Toute intégrale est donc une limite de somme de Riemann. □

Remarque 38.3.
Le résultat ci-dessus reste valable si f est continue par morceaux. Il suffit de refaire la même démonstration avec des subdivisions adaptées à f.

Proposition 38.4. *Cas particulier d'une subdivision régulière*
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on particularise $a_i = a+i\dfrac{b-a}{n}$ et $\xi_i=a_i$ (donc $h=\dfrac{b-a}{n}$). On a alors :

$$a_{i+1}-a_i=\frac{b-a}{n}.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 38.5. *Cas particulier des fonctions définies sur* $[0;1]$
La formule ci-dessous devient alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 38.6.
On veut étudier la limite de la somme :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$
On considère l'application f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On a alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \ln 2.$$

38.2 Intégration par primitives

Définition 38.7.
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème 38.8. *Existence de primitives*
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration. ◊ On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a;b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Soit f une fonction continue sur I et on note m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, :
$$\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m.$$
Étant donné que l'on cherche une fontiton F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. □

Théorème 38.9. *Lien entre les primitives*
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme :
$$x \mapsto F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. ◊

— Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$. La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.

— On vérifie maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I.

□

Propriété 38.10. *Condition d'unicité d'une primitive*
Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. ♢

Existence : soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

Unicité : notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I.

□

Les primitives permettent de faire du calcul intégral.

Propriété 38.11.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. ♢ Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$. Φ et F étant deux primitives de f sur $[a;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a;b]$. Ainsi, $\Phi(b) = F'(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$, et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

Corollaire 38.12. *Formule de Newton-Leibniz*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors pour tous a et b dans I :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration. ♢ Soit $x_0 \in I$ et G la primitive de f définie par :

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que deux primitives F et G diffèrent d'une constante. Donc il existe un réel k tel que pour tout :

$$F(x) = G(x) + k.$$

On a alors :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 38.13.
La quantité $F(b) - F(a)$ se note souvent $[F(t)]_a^b$.

Exemples 38.14.

1. $$\int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

2. $$\int_0^1 x^n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3. $$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}t = \int_2^{\mathrm{e}} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{\mathrm{e}} = -\ln(\ln(2)).$$

Remarque 38.15.
Le choix de la primitive F choisie n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors elles différent d'une constante. Les quantités $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales.

Théorème 38.16. *Inégalité des accroissements finis*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' soit continue sur I. S'il existe un réel M tel que $|f'| \leqslant M$ sur I alors : pour tous réels a et b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b - a|$.

Démonstration. ♢ Pour $a < b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t) \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a) \leqslant M\,|b-a|\,.$$

Pour $a > b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_b^a f'(t) \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_b^a |f'(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant M(a-b) \leqslant M\,|b-a|\,.$$

□

38.3 Intégration par parties

Définition 38.17. *Classe $\mathscr{C}^1$*

On dit qu'une fonction est de *classe $\mathscr{C}^1$* sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème 38.18.
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t) \,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) \,\mathrm{d}t.$$

◊ *Démonstration du théorème 38.18.* On sait que pour tout $t \in [a; b]$:

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

En intégrant de a à b :

$$\int_a^b (u(t)v(t))' \,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) + u'(t)v'(t) \,\mathrm{d}t$$

et d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (u(t)v(t)') \,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t) \,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t) \,\mathrm{d}t$$

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) \,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t) \,\mathrm{d}t.$$

D'où le théorème. □

► **Méthode 38.19.**
Pour intégrer par parties, il faut

- reconnaître, dans la fonction à intégrer, le produit d'une fonction u et d'une fonction dérivée v' ;
- appliquer la formule d'intégration par parties.

Exemples 38.20.

1. Soit à calculer :

$$I = \int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$. D'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$ (à une constante près) et ainsi :

$$I = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

2. Soit à calculer :

$$J(x) = \int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t.$$

On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. D'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ (à une constante près) et ainsi :

$$J(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1.$$

38.4 Intégration par changement de variables

Théorème 38.21.
Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$, dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u.$$

La démonstration est hors programme du BTS et admise.

Remarque 38.22.

Dans $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \,\mathrm{d}u$, on pose $u = \varphi(t)$ (changement de variable qu'on donne ou qu'on doit trouver). Si t vaut a (resp. b) alors u vaut $\varphi(a)$ (resp. $\varphi(b)$), ce qui conduit à changer les bornes de l'intégrale. Ensuite $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, ou encore (bien que cette écriture soit formellement incorrecte au niveau BTS), $\mathrm{d}u = \varphi'(t) \,\mathrm{d}t$, que l'on remplace dans l'intégrale.

◊ *Démonstration (hors programme).* Posons $H(x) = \int_\alpha^x f(u)\,\mathrm{d}u$ où α et x sont deux éléments de I. La fonction f est continue sur I, donc la fonction H est dérivable sur I, on a $H'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\alpha} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_\alpha^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_\alpha^{\varphi(a)} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_\alpha^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

soit :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = -H(\varphi(a)) + H(\varphi(b)) = -(H\circ\varphi)(a) + (H\circ\varphi)(b).$$

Posons $K = H \circ g$, nous obtenons :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = K(b) - K(a).$$

Comme la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et puisque H est dérivable sur I, la fonction composée K est dérivable sur $[a;b]$ et on a :

$$K'(t) = H'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Par conséquent, la fonction K est une primitive sur $[a,b]$ de la fonction $(f\circ\varphi)\varphi'$.

De plus, les fonctions φ et φ' sont continues sur $[a,b]$ et la fonction f étant continue sur I alors la fonction K' est continue sur $[a,b]$ et on a :

$$K(b) - K(a) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

soit encore :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi'(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exemples 38.23.

1. Soit à calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

   On met t^2+t+1 sous la forme canonique :

$$t^2+t+1 = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right].$$

   Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u,$$

   en posant $u = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$

$$U = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. Soit f une fonction T-périodique. Alors l'intégrale de f sur une période est constante ; par exemple :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles

$$= \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-T/2}^{0} f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

en posant $u = t - T$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $f(u+T) = f(u)$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ **Exercice 38.24.** *Intégrale de Wallis*
Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t,\ J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t,\ K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t,\ L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t.$$

♢

1. On va calculer I_n grâce à une intégration par parties. On a immédiatement :

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = 1.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a, par intégration par parties [$u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$]

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t\,\mathrm{d}t = \Big[(\cos t)^{n+1} \sin t\Big]_0^t + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\sin t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

ou encore :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geqslant 2.$$

On en déduit immédiatement :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}, \quad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Ainsi, on peut en déduire une formule générale :

— Si n pair ($n = 2p$) :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{\binom{2p}{p}\pi}{2^{2p+1}}.$$

— Si n impair ($n = 2p+1$) :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. On calcule J_n en se ramenant à I_n. En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^n\,\mathrm{d}u = I_n.$$

3. On calcule K_n en se ramenant à I_{2n+1}. On pose $u = \arcsin t$ ($t \mapsto \arcsin t$ est une bijection de $[-1;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$). On a donc $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^{2n} \cos u \,\mathrm{d}u = 2I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. On calcule L_n en se ramenant à K_n.

$$L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \,\mathrm{d}t = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

38.5 Intégration de fractions rationnelles

► **Exercice 38.25.**

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$:

$$\frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

2. (a) En déduire sur $]1;+\infty[$ une primitive F_1 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.$$

   (b) Déterminer une primitive F_2 de f sur l'intervalle $]-1;1[$ puis une primitive F_3 sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

3. Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_{-4}^{-2} \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2} \,\mathrm{d}x$$

puis la valeur décimale approchée de 1 à 10^{-2} près par défaut.

◊ *Correction de l'exercice.* 1.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} &= \frac{a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x^2+2x+1) + b(x^2-1) + cx - c}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+c)x + a - b - c}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, la comparaison des coefficients respectifs donne :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+c=0 \\ a-b-c=-4 \end{cases}$$

On exprime, à l'aide des deux premières équations, b et c en fonction de a et l'on reporte les expressions trouvées dans la troisième équation $b = 2-a$ et $c = -2a$:

$$a - (2-a) - (-2a) = -4 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

On en tire $b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $c = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi,

$$a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2},\ c = 1.$$

2. (a) On peut écrire, en utilisant les résultats de la première question :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $x-1>0$ et $x+1>0$. On en reconnaît dans les deux premiers quotients la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u>0$. Le troisième quotient est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Une primitive F_1 de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est :

$$F_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

(b) Dans le cas général $x \mapsto \ln|u|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{u'}{u}$ si $u \neq 0$.

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}.$$

Si $u<0$, $\ln|u| = \ln(-u)$, on applique cette règle pour le calcul des primitives F de f : sur l'intervalle $]-1;1[$, $x-1<0$ et $x+1>0$:

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(-x+1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1},$$

sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, $x-1<0$ et $x+1<0$:

$$F_3(x) = -\frac{1}{2}\ln(-x+1) + \frac{5}{2}\ln(-x-1) - \frac{1}{x-1}.$$

3. L'intervalle $[-4;-2]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty;1[$. On utilise, pour primitive de f, la fonction F_3.

$$\begin{aligned} I = F_3(-2) + F_3(-4) &= \left(-\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 1 - \frac{1}{-1}\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{-3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln 3 + 1 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 5 - 3\ln 3 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $I \approx -1{,}824451$, ce qui signifie $-1{,}83 \leqslant I \leqslant -1{,}82$. La valeur décimale approchée par défaut de I à 10^{-2} près est : $I \approx -1{,}83$.

□

38.6 Calcul approché de l'intégrale

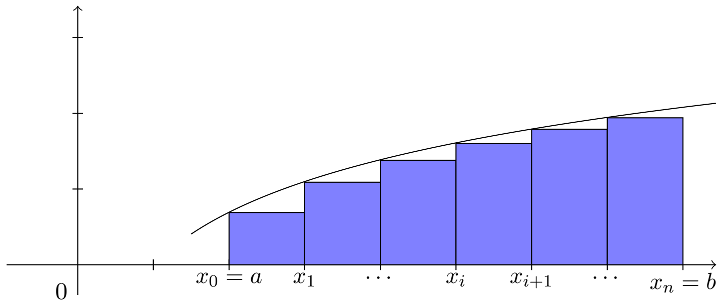
Dans cette section, on ne travaillera qu'avec des fonctions monotones (croissantes). Si la fonction n'est pas monotone, il suffit de subdiviser l'intervalle I.

38.6.1 Méthode des rectangles à gauche

On subdivise $[a,b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Soit R_k l'aire du rectangle $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$. On a donc :

$$AR_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

où AR_n correspond à l'aire de tous les rectangles tracés.



Remarques 38.26.

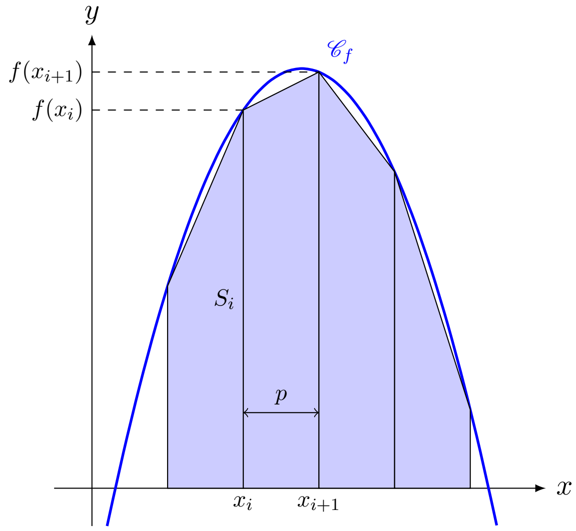
1. Si f est croissante, c'est une approximation par défaut et si f est décroissante, c'est une approximation par excès.
2. La méthode des rectangles à gauche fait penser aux sommes de Riemann vue en début de leçon.

38.6.2 Méthode des trapèzes

On construit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $x_i = a + i \times p$ où p est le pas égal à $\dfrac{b-a}{n}$. Soit $\mathscr{T}_k$ l'aire du trapèze $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ et

$$\begin{aligned} AT_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{T}_k &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \\ &= p\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right) \end{aligned}$$

où AT_n correspond à l'aire de tous les trapèzes tracés.



Remarque 38.27.
Plus rapide en termes de convergence par rapport à n mais on ne peut pas savoir si c'est une approximation par excès ou par défaut.

38.7 Autres calculs de primitives

Exemple 38.28.
On veut calculer :

$$F = \int (t^2 + 2t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

où λ est un nombre réel non nul.

Puisque la fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est une fonction polynôme, cherchons F sous la forme $F(x) = P(x)\exp(\lambda x)$, où P est une fonction polynôme de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. On doit avoir quel que soit x :

$$F'(x) = (P'(x) + \lambda P(x))\exp(\lambda x) = (x^2 + 2x)\exp(\lambda x),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x^2 = 2x = P'(x) + \lambda P(x) &= (2ax+b) + \lambda(ax^2+bx+c) \\ &= \lambda a x^2 + (2a+\lambda b)x + b + \lambda c. \end{aligned}$$

Les coefficients a, b et c sont solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \lambda a = 1 \\ 2a + \lambda b = 2 \\ b + \lambda c = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\lambda} \\ b = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2} \\ c = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^3} \end{cases}.$$

Il vient donc

$$F(x) = \left[\frac{1}{\lambda}x^2 + 2\frac{\lambda-1}{\lambda^2}x + 2\frac{1-\lambda}{\lambda^3}\right]\exp(\lambda x).$$

Exemple 38.29.
On veut calculer

$$\int (\sin t)^4 \, \mathrm{d}t.$$

Nous avons l'identité :

$$8(\sin x)^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3.$$

Il vient donc :

$$\int (\sin t)^4 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \cos(4t)\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \cos 2t \, \mathrm{d}t + \frac{3}{8}\int \mathrm{d}t = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x.$$

LEÇON

39

EXEMPLES DE RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS (MÉTHODES EXACTES, MÉTHODES APPROCHÉES).

Préambule

Niveau : tous niveaux (à partir de la classe de quatrième)

Prérequis : arithmétique (PGCD, congruences), fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, nombres complexes, changement de variables, évolutions, dérivées, calcul intégral, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Pythagore.

Références : f

[1] D. MÜLLER*Résolution d'équations*. LCP, 2019. [url].

[2] G. BRINGUIER & al., *Maths 2nde Profesionnelle Industriel*, Hachette Technique, 2009.

[3] C. PARFENOFF, *Equations produit-nul, équations du type $x^2 = a$.* [url]

[4] H. GRINGOZ & al, *Manuel Sesamaths, 2nde.* Magnard 2019.

[5] A. Bodin, *Systèmes linéaires.* Exo7. [url]

[6] D. ARNAUD & al, *Manuel Sesamaths, TS Spé.* Magnard 2016.

[7] J.-P. BELTRAMONE & al., *Déclic TS, Mathématiques enseignements spécifique et de spécialité*, Hachette Education, 2012.

[8] D. ARNAUD & al, *Manuel Sesamaths, TS.* Magnard 2016.

[9] N. DAVAL, *Chapitre 7 : Équations différentielles*, Terminale STI2D. [url]

[10] A. BODIN & al., *Zéros de fonctions.* Exo7. URL : `http://exo7.emath.fr/cours/ch_zeros.pdf`

[11] Unknown, *Quand et comment utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires ?.* Maths-Desfontaines. Novembre 2007. [url]

[12] P. LAPÔTRE & R. MOCHÉ, *Algorithmique : méthode de Newton-Raphson*, Terminale S. [url]

[13] M. GARIN, *Maths de base*, Marabout 1983.

[14] A. COLLOT & al, *Manuel Sesamaths, 1S.* Magnard 2015.

[15] D. PINEL, *Chapitre II : Taux d'évolution - Indices*, Terminale STG. [url]

[16] G. COSTANTINI, *Les nombres complexes.* [url]

[17] X. CARUSO, *Cours d'Arithmétique*, Juillet 2002. [url]

La leçon sera découpée en trois grandes parties.

— On verra, dans un premier temps, les méthodes exactes de résolutions de divers types d'équations (que l'on rencontre très souvent en mathématiques)

— puis des méthodes approchées quand il n'existe pas de méthodes exactes pour résoudre certaines équations plus complexes.

— Pour finir, nous verrons, en compléments, comment résoudre d'autres types d'équations un peu moins utilisé en mathématiques.

Mais avant de commencer la leçon, rappelons ce qu'est une égalité et ce qu'est une équation.

Définition 39.1. *Égalité*

Une *égalité* est une relation binaire entre objets (souvent appartenant à un même ensemble) signifiant que ces objets sont identiques, c'est-à-dire que le remplacement de l'un par l'autre dans une expression ne change jamais la valeur de cette dernière.

Exemple 39.2.
La proposition : « $3 + 2 = 4 + 1$ est une égalité vraie.

Définition 39.3. *Équation*

Une *équation* est une relation contenant une ou plus variables (ce sont des inconnus ou des paramètres).

Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre l'inconnu (ou les inconnus) pour rendre l'égalité vraie.

39.1 Méthodes exactes de résolution d'équations

39.1.1 Équations polynomiales

On s'intéresse tout d'abord à des équations du type :

$$P(x) = Q(x)$$

où P et Q sont des polynômes de degré quelconque.

Équations du premier degré

Définition 39.4.

On dit qu'une équation est du premier degré si elle est sous la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ où x est l'inconnue.

Pour résoudre des équations du premier degré, on a recours aux propriétés suivantes.

Propriété 39.5.
Pour tous nombres a, b et c :

- Si $a = b$ alors $a + c = b + c$.
- Si $a = b$ alors $a - c = b - c$.
- Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$.

Pour tous nombres a, b et c (où $c \neq 0$) :

$$a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

Exemple 39.6.
On veut résoudre l'équation $-2x + 4 = 0$:

1. on ajoute -4 des deux côtés de l'égalité :

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 - 4 = 0 - 4 \Leftrightarrow -2x = -4$$

2. on divise par -2 qui est non nul des deux côtés de l'égalité :

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2}$$

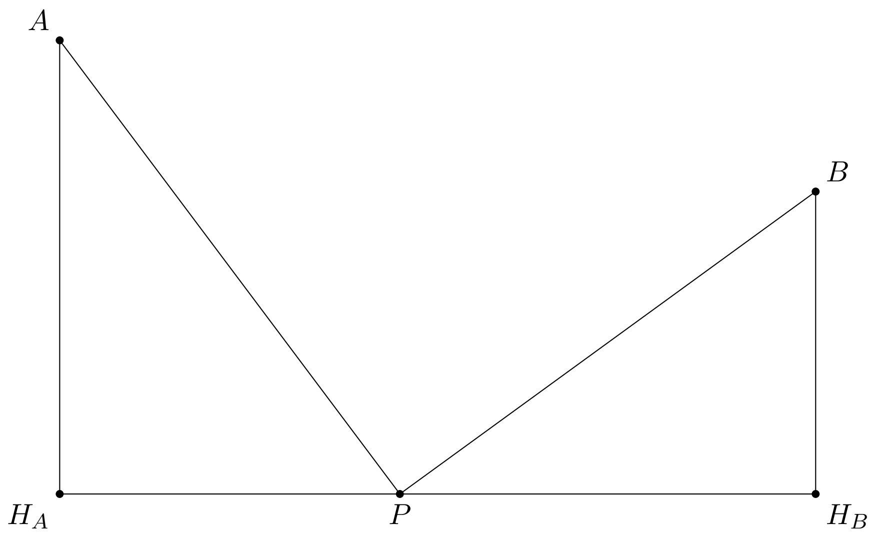
et on simplifie :

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow x = 2.$$

▶ **Exercice 39.7.**
Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier, l'un vis-à-vis de l'autre. La hauteur du premier est de 30 mètres et celle du second de 20 mètres ; la distance entre leurs pieds est de 50 mètres. Un oiseau est perché sur la cime de chaque arbre. Brusquement les oiseaux ont aperçu un poisson à la surface de l'eau ; ils se sont jetés simultanément sur lui et l'on atteint au même instant (on suppose qu'ils volent à la même vitesse).

Solution. ♢ Faisons un schéma de la situation. On note :

— H_A le pied du premier palmier, A la position de l'oiseau du premier palmier ;
— H_B le pied du second palmier, B la position de l'oiseau du second palmier ;
— P la position du poisson. P appartient au segment $[H_A H_B]$ (qui représente la surface de l'eau) et donc on peut noter $(p; 0)$ les coordonnées de p avec $0 \leqslant p \leqslant 50$.



Le triangle $H_A AP$ (resp. $H_B BP$) est rectangle en H_A (resp. H_B). On a $H_A A = 30$, $H_B B = 20$, $H_A P = p$ et $H_B P = (50 - p)$. Les oiseaux volent à la même vitesse et atteignent le poisson au même instant donc $PA = PB$. Comme $PA > 0$ et $PB > 0$, $PA = PB$ implique que $PA^2 = PB^2$.

Comme les triangles $H_A AP$ et $H_B BP$ sont rectangles, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$PA^2 = H_A A^2 + H_A P^2$$
$$PB^2 = H_B B^2 + H_B P^2$$

L'équation à résoudre devient :

$$\begin{aligned} PA^2 = PB^2 &\Leftrightarrow H_A A^2 + H_A P^2 = H_B B^2 + H_B P^2 \\ &\Leftrightarrow 30^2 + p^2 = 20^2 + (50 - p)^2 \\ &\Leftrightarrow 900 + p^2 = 400 + 2500 - 100p + p^2 \\ &\Leftrightarrow 900 - 400 - 2500 = -100p \Leftrightarrow 100p = 2000 \Leftrightarrow p = 20. \end{aligned}$$

Ainsi, le poisson se trouve à 20 mètres du pied du premier palmier. □

Équations du second degré avec les nombres réels

Définition 39.8.
Une équation du second degré à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

On peut résoudre de trois manières une telle équation.

1) Equation produit-nul

Définition 39.9. *Equation produit-nul*

Une équation produit-nul est une équation qui peut s'écrire sous la forme d'un produit égale à 0.

Exemples 39.10.
Les équations suivantes sont des équations produits-nuls :

— $(5x+3)(3x-2)=0$

— $7(3x+4)(7x+1)=0$

Propriété 39.11.
Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul. Donc, pour tout nombre réel a, on peut écrire :

$$0\times a=0 \quad \text{ou} \quad a\times 0=0.$$

La réciproque de cette propriété est vraie :

Propriété 39.12.
Si un produit est nul alors au moins un de ses facteur est nul. Donc, si $a\times b=0$ alors $a=0$ ou $b=0$.

On peut résoudre facilement des équations du second degré grâce à cette propriété.

Exemple 39.13.
On souhaite résoudre l'équation $(3x+1)(2x-1)=0$. On a affaire à une équation produit nul. Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :

$$3x+1=0 \quad \text{ou} \quad 2x-1=0$$

ainsi :

$$\begin{aligned} 3x&=-1 &\quad \text{ou} \quad 2x&=1\\ x&=-\frac{1}{3} &\quad \text{ou} \quad x&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'équation produit $(3x+1)(2x-1)=0$ admet deux solutions $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

2) Résolution de l'équation $x^2=a$

Propriété 39.14.
L'équation $x^2=a$ admet :

— deux solutions quand $a>0$, $x_1=\sqrt{a}$ et $x_2=-\sqrt{a}$;

— une solution quand $a=0$, $x_0=0$;

— pas de solutions dans $\mathbb{R}$ quand $a<0$.

Exemple 39.15.
L'équation $x^2=7$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ car $7>0$:

$$x_1=-\sqrt{7} \quad \text{et} \quad x_2=\sqrt{7}.$$

En seconde, on ne connaît pas la méthode du discriminant (que l'on voit dans la section suivante). On résout des équations du second degré soit par :

— la méthode de résolution de l'équation produit-nul (avec la forme factorisée) ;

— l'identité remarquable A^2-B^2 combinée à la méthode précédente (avec la forme canonique) ;

— la méthode de résolution de l'équation $X^2=a$ (avec $a\geqslant 0$).

► **Exercice 39.16.**
On considère l'équation $(E) : x^2 - x - 5 = 0$.

1. Démontrer que $x^2 - x - 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$.
2. Résoudre l'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Solution. ♢

1. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} &= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{21}{4} \\ &= x^2 - x + \frac{1-21}{4} = x^2 - x + \frac{20}{4} = x^2 - x + 5.\end{aligned}$$

2. On utilise la méthode de résolution de l'équation « $X^2 - a$ » avec $X = \left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $a = -\frac{21}{4}$.

$$\text{soit } x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ soit } x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{soit } x = -\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2} \text{ soit } x = \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{1}{2}$$

Les deux solutions de l'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$ sont $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

3. On a :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = 0$$

Or, on a démontré à la question 1 que $x^2 - x - 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$ donc l'équation $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = 0$ est équivalente à l'équation (E). D'où les solutions de l'équation (E) sont : $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

□

3) Discriminant

Comment obtenir la forme canonique d'un polynôme de degré 2 à partir de sa forme développée ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On factorise d'abord l'expression par a (on peut le faire car $a \neq 0$), on obtient :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.\right)$$

On remarque ensuite que :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

et ainsi :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

En remplaçant dans l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Si on développe la dernière expression, on a alors :

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

On peut poser $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Remarque 39.17.

— $x^2 + kx$ est le début du développement de $\left(x+\frac{k}{2}\right)^2$.

— En classe de seconde, on a appris que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. On peut vérifier que $f(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Définition 39.18. *Discriminant*

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est le *discriminant* du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Définition 39.19. *Racines du trinôme*

On appelle *racines* du trinôme du second degré ax^2+bx+c les solutions de l'équation $ax^2+bx+c = 0$. Ce sont les valeurs de x qui annulent le trinôme.

Théorème 39.20.

Le nombre de solutions de l'équation (E) du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ.

— Si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions à l'équation (E) :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On peut ainsi factoriser le trinôme : $a(x-x_1)(x-x_2)$.

— Si $\Delta = 0$ alors il y a une unique solution (qu'on appelle *racine double*) à l'équation (E) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

On peut ainsi factoriser le trinôme : $a(x-x_0)^2$.

— Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (E). Ainsi, il n'y a pas de factorisation du trinôme dans $\mathbb{R}$.

Exemple 39.21.
On souhaite résoudre l'équation $x^2-4x+1=0$. On utilise la méthode du discriminant pour résoudre cette équation. Le discriminant du polynôme x^2-4x-1 est :

$$\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 1=16-4=12.$$

12 est positif donc l'équation $x^2-4x+1=0$ admet deux solutions. On peut simplifier l'écriture de la racine carrée de 12 : $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Ainsi :

$$x_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\quad \text{et}\quad x_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

Les solutions de l'équation $x^2-4x+1=0$ sont : $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

Équations du second degré avec les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes introduit le nombre imaginaire i tel que $\mathrm{i}^2=-1$. Ainsi, l'équation « $x^2=a$ » admet deux solutions complexes conjugués quand $a<0$.

Théorème 39.22.
Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2=a$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$.
- Si $a>0$, les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a<0$, les racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Dans la méthode de résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ par le discriminant, le cas $\Delta<0$ nous donne deux solutions complexes conjugués.

Théorème 39.23.
Soit l'équation du second degré $az^2+bz+c=0$ (où $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$) que l'on doit résoudre. Si on note le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ de cette équation, on obtient :
- Si $\Delta=0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $z_0=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont conjuguées :

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\quad \text{et}\quad z_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La démonstration est similaire au paragraphe « Comment passer de la forme développée à la forme canonique ? ».

Exemple 39.24.
On souhaite résoudre l'équation $z^2-2z=-3$. On ramène à un second membre nul :

$$z^2-2z+3=0.$$

On peut calculer le discriminant : $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 3=-8$. Le discriminant est strictement négatif, il y a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{2-\mathrm{i}\sqrt{8}}{2}=1-\mathrm{i}\sqrt{2}\quad \text{et}\quad z_2=\frac{2+\mathrm{i}\sqrt{8}}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{2}$$

qui sont bien complexes conjuguées.

Racines évidentes, identification des coefficients

Pour des polynômes de degré supérieur, on peut utiliser :

— la formule de Cardan-Tartaglia pour des équations de degré 3 ;

— La formule de Ferrari pour des équations de degré 4.

Abel a formulé le théorème suivant pour la résolution d'équations polynomiales de plus haut degré :

Théorème 39.25.
Il n'existe aucune formule générale pour la résolution des équations de degré supérieur à 4.

Des fois, il est assez simple de résoudre des équations du type $P(x) = 0$ avec P de degré supérieur ou égale à 3 en cherchant des racines évidentes et de faire une identification des coefficients du polynômes.

Définition 39.26. *Égalité de polynômes*

Soit m et n deux entiers naturels non nul. Soit $(a_0, \dots, a_n)$ un $(n+1)$-uplet de nombres et $(b_0, \dots, b_m)$ deux $(m+1)$-uplets de nombres. On dit que

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

sont deux polynômes égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} m = n \\ a_i = b_i, \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

▶ **Exercice 39.27.**
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0 \quad (E)$$

1. Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E). Déterminer trois réels a, b et c tels que (E) s'écrive ;

$$(E) : (z-4)(az^2 + bz + c) = 0.$$

2. Résoudre l'équation (E). On notera z_1 sa solution ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
3. Démontrer que les images respectives M_0, M_1 et M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$. Illustrer.

39.1.2 Systèmes linéaires

On s'intéresse ici à la résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Définition 39.28. *Système linéaire de deux équations à deux inconnues*

On dit qu'un couple $(x; y)$ vérifie le système suivant de deux équations linéaires du 1er degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations.

Remarques 39.29.
Résoudre un tel système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système, quand il existe, donc à étudier d'abord la position relative des deux droites.

— Si elles sont *sécantes* le système admet un seul couple solution.
— Si elles sont *strictement parallèles* le système n'admet aucune solution
— Si elles sont *confondues* le système a un nombre infini de solutions.

Il y a trois méthodes pour résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

1) Méthode par substitution

▶ **Méthode 39.30.** *Résolution d'un système par substitution*
Cette méthode consiste à *isoler une inconnue* à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.

On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Remarque 39.31.
Cette méthode présente l'inconvénient que si la résolution de la première équation est fausse alors celle de la seconde le sera également.

Exemple 39.32.
On veut résoudre le système :

$$\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=-3 \\ 3x-5y=2 \end{cases}.$$

On isole l'inconnue y dans la première ligne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5y=2 \end{cases}$$

puis on remplace y dans la deuxième équation pour obtenir :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5(2x-3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-10x+15=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ -7x=2-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ x=\frac{13}{7} \end{cases}.$$

On a plus qu'à remplacer la valeur numérique de x dans la première équation :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2\times\frac{13}{7}-3 \\ x=\frac{13}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{7} \\ x=\frac{13}{7} \end{cases}.$$

La solution du système est donnée par le couple $\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)$.

2) Méthode par combinaison

▶ **Méthode 39.33.**
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la méthode pour éviter l'inconvénient de la méthode précédente.

Exemple 39.34.
On veut résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 = 0 & (L_1) \\ 3x - 4y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Pour trouver y, on peut faire $3 \times L_1 - 2 \times L_2$, on obtient :

$$(6x + 9y + 3) + (-6x + 8y + 4) = 0 \Leftrightarrow 17y + 7 = 0$$

Pour trouver x, on peut faire $4 \times L_1 - 3 \times L_2$, on obtient :

$$(8x + 12y + 4) + (9x - 12y - 6) = 0 \Leftrightarrow 17x - 2 = 0$$

On obtient le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 17y + 7 = 0 \\ 17x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{7}{17} \\ x = \frac{2}{17} \end{cases}.$$

Donc la solution est le couple $\left(\dfrac{2}{17}; \dfrac{-7}{17}\right)$.

3) Méthode d'inversion de matrices

Cette méthode n'est pas au programme de seconde mais elle permet de résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

peut s'écrire, sous forme matricielle, de la manière suivante : $AX = Y$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A ($\det(A) = ab' - a'b$) est non nul, alors la matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système est donnée par $X = A^{-1}Y$.

Exemple 39.35.
On veut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}.$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations donné est équivalent à l'équation matricielle suivante : $AX = B$. Le déterminant de la matrice A est égal à :

$$\det(A) = 1 \times 3 - (-1) \times (-2) = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

La matrice A est donc inversible et d'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système est donnée par :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) + 2 \times 3 \\ 1 \times (-1) + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

39.1.3 Équations diophantiennes (arithmétique)

On donne une définition des équations diophantiennes que l'on rencontre en arithmétique.

Définition 39.36. *Équation diophantienne*

Une *équation diophantienne* est une équation à coefficients entiers dont on cherche les solutions entières. Soit a, b et c trois entiers relatifs, les équations diophantiennes du premier degré sont du type : $ax + by = c$.

Pour résoudre les équations diophantiennes, on a besoin de quelques résultats.

Propriété 39.37.
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, et D leur PGCD. Alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = D$.

Démonstration. ♢

— Soit E l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$ où x et y sont des entiers relatifs. E est une partie non vide de $\mathbb{N}$. En effet, on a par exemple : $|a| \in E$ car, selon le signe de a, l'entier naturel $|a|$ s'écrit $a \times 1 + b \times 0$ ou $a \times (-1) + b \times 0$. E étant une partie non vide de $\mathbb{N}$, E admet un plus petit élément n.

  Par définition de E, il existe donc des entiers relatifs u et v tels que $n = au + bv$. Or D divise a et b, donc D divise n, d'où $D \leqslant n$.

— On montre que n divise a en écrivant la division euclidienne de a par n :

$$a = nq + r$$

  avec $0 \leqslant r < n$ et q entier relatif. Donc :

$$r = a - nq = a - q(au + bv) = a(1 - qu) + b(-qv).$$

  Ainsi r est de la forme $ax + by$ avec x et y entiers relatifs. De plus, $r < n$, donc, par définition de n, $r \notin E$. Alors nécessairement : $r = 0$ et donc n divise a.

— On montre de même que n divise b. D'où, par définition de D, $n \leqslant D$. Finalement, on obtient $D = n = au + bv$.

□

Remarque 39.38.
L'algorithme d'Euclide permet d'obtenir des entiers u et v tels que $au + bv = D$.

Théorème 39.39. *Théorème de Bézout*
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration. ♢ Si a et b sont premiers entre eux, alors $\&textPGCD(a,b) = 1$ et donc, avec la propriété précédente, il existe des entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Soit $D = \&textPGCD(a,b)$; alors D divise a, D divise b donc D divise $au + bv$, d'où $D = 1$. □

Propriété 39.40.
Une équation diophantienne du premier degré, de la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des entiers relatifs, admet des solutions si, et seulement si, c est un multiple du $\&textPGCD(a,b)$.

Démonstration. ♢ Cela découle directement du corollaire du théorème de Bézout. □

Théorème 39.41. *Théorème de Gauss*
Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration. ♢ Comme a divise bc, il existe un entier k tel que $bc = ka$. Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. En multipliant par c cette dernière égalité, on obtient :

$$c = acu + bcv = acu + kav = a(cu + kv).$$

Comme $(cu + kv)$ est un entier, cette égalité prouve que a divise c. □

Corollaire 39.42.
Si b et c divisent a et si b et c sont premiers entre eux, alors bc divise a.

Démonstration. ♢ Si b et c divisent a, alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $a = kb$ et $a = k'c$ donc $kb = k'c$. b divise $k'c$, or $\&textPGCD(b,c) = 1$, donc, d'après le théorème de Gauss, b divise k' donc $k' = k''b$:

$$a = k'c = k''bc.$$

Donc bc divise a. □

► **Exercice 39.43.**

1. Déterminer $\&textPGCD(2\,688; 3\,024)$.
2. On cherche à déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de :

$$(E) : 2\,668x + 3\,024y = -3360.$$

   (a) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $8x + 9y = -10$.
   (b) Vérifier que le couple $(1; -2)$ est solution de (E).

3. (a) Démontrer que si le couple $(x; y)$ est solution de (E) alors $8(x-1) = 9(-y-2)$.
   (b) En déduire que si le couple $(x; y)$ est solution de (E), alors il existe un entier k tel que :

$$x = 1 + 9k \quad \text{et} \quad y = -2 - 8k.$$

   (c) Quel est l'ensemble des couples solutions de l'équation (E) ?

Solution. ♢

1. On a :

$$3\,024 = 1 \times 2\,866 + 336$$
$$2\,866 = 8 \times 336 + 0.$$

Donc : $\&textPGCD(2\,688; 3\,024) = 336$.

2. (a) On divise les deux membres de l'équation (E) par 336 et on obtient l'équation diophantienne :

$$8x + 9y = -10.$$

   (b) $8 \times 1 + 9 \times (-2) = -10$ donc le couple $(1; -2)$ est solution de (E).

3. (a) Si le couple $(x; y)$ est solution, alors $8x+9y = -10$ et on sait également que $8\times 1+9\times(-2) = -10$, donc par soustraction membre à membre, on obtient :

$$8(x-1) + 9(y+2) = 0 \Leftrightarrow 8(x-1) = 9(-y-2).$$

   (b) D'après l'égalité $8(x-1) = 9(-y-2)$, et comme $(x-1)$ et $(-y-2)$ sont des entiers, on a : 8 divise $9(-y-2)$.
   Comme 8 est premier avec 9, d'après le théorème de Gauss, 9 divise $(-y-2)$. Donc il existe un entier relatif k tel que $-y-2 = 8k$, et on a donc : $y = -2-8k$. On a alors : $8(x-1) = 9 \times 9k$, c'est-à-dire $x - 1 = 9k$. Ainsi, $x = 1 + 9l$ pour le même entier relatif k.

4. Réciproquement, on vérifie que les couples $(1 + 9k; -2 - 8k)$ sont solutions :

$$8(1+9k) + 9(-2-8k) = 8 + 72k - 18 - 72k = -10.$$

Les couples-solutions sont les couples de la forme $(1 + 9k; -2 - 8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

□

39.1.4 Équations différentielles

Définition 39.44.
Une *équation différentielle* est une relation entre une variable réelle, une fonction qui dépend de cette variable et un certain nombre de ses dérivées successives.
Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

Équations différentielles du type $y' = f$. Recherche de primitives

La première équation différentielle que l'on rencontre en classe de Terminale est l'équation différentielle du type $y' = f$ où f est une fonction réelle à variable réelle. Résoudre une telle équation signifie de rechercher les primitives de la fonction f.

Définition 39.45.
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 39.46.
On veut résoudre l'équation différentielle $y' = 2x$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions du type : $y = x^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Théorème 39.47. *Existence de primitives*
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration. $\Diamond$ On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a;b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Soit f une fonction continue sur I et on note m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I. La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$, :

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m.$$

Étant donné que l'on cherche une fontiton F, définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. □

Théorème 39.48. *Lien entre les primitives*
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme :

$$x \mapsto F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. $\Diamond$

— Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I. Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$. La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.

— On vérifie maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I. Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I.

□

Propriété 39.49. *Condition d'unicité d'une primitive*
Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I, il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. $\Diamond$

Existence : soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I. Alors F est une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.

Unicité : notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f, il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I.

□

Les primitives permettent de faire du calcul intégral.

Propriété 39.50.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. ◊ Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$. Φ et F étant deux primitives de f sur $[a;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a;b]$. Ainsi, $\Phi(b) = F'b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$, et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. □

On donne une table de primitives pour les fonctions de références et une autre sur les primitives d'opérations de fonctions à connaître pour la classe de Terminale S.

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$, $k \in \mathbb{R}$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u'u^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	$x \in I$

Équations différentielles du type $y' + ay = b$

Propriété 39.51.
On considère l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où a est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. ♢ On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ay = 0$.

— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = -ak\mathrm{e}^{-ax}$ et :
$$f'(x) + af(x) = -ak\mathrm{e}^{-ax} + ak\mathrm{e}^{-ax} = 0$$
donc f est bien solution de (E).

— Les solutions de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ sont des solutions de (E). Il reste à montrer qu'il n'en existe pas d'autres. Pour cela, on considère une fonction quelconque g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E) : soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{ax}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée :
$$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{ax} + ag(x)\mathrm{e}^{ax} \Leftrightarrow h'(x) = \mathrm{e}^{ax}(g'(x) + ag(x)) = 0.$$
On a alors :
$$h(x) = K \Leftrightarrow g(x)\mathrm{e}^{ax} = K \Leftrightarrow g(x) = K\mathrm{e}^{-ax}.$$
On a donc montré que toute fonction solution de (E) est nécessairement de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-ax}$, où K est un réel quelconque.

□

Exemple 39.52.
On veut résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$ où k est un réel.

Propriété 39.53.
On considère l'équation $y' + ay = b$, où $a \neq 0$ et b sont des nombres réels et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :
$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 39.54.
On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 4$. Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + \frac{4}{2} = k\mathrm{e}^{-2x} + 2.$$

Propriété 39.55.
Soient x_0, y_0, $a \neq 0$ et b des réels donnés. L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple 39.56.
On veut résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 2$ dont la solution f vérifie $f(0) = 1$.

— Les solutions de l'équation sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4$ où k est une constante réelle.

— On a : $f(0) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0} - 4 = k - 4$. $f(0) = 1$ donc $k = 4 + 1 = 5$.

— La solution de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 2$ telle que $f(0) = 1$ est $f(x) = 5\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4$.

Équations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Propriété 39.57.
On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non nul et y une fonction de la variable x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 39.58.
On souhaite résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$. Ici, $\omega^2 = 4$ donc $\omega = 2$. Les solutions sont du type $f(x) = \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$ où λ et μ sont des réels.

Propriété 39.59.
L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant deux conditions initiales données.

Remarque 39.60.
Les conditions initiales sont, en général, du type :

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Exemple 39.61.
On considère l'équation $(E) : 4y'' + \pi^2 y = 0$ dont la solution vérifie les conditions initiales :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

— On résout l'équation différentielle générale :

$$(E) \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$$

les solutions sont donc :

$$f(x) = \lambda\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

— On utilise la première condition :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mu\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + \mu).$$

On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient $\lambda + \mu = 1$.

— On utilise la seconde condition :

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\lambda\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\mu\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Or :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\lambda\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\mu\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\mu\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}(-\lambda + \mu).$$

Sachant que $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on obtient $-\lambda + \mu = 0$.

— On résout donc le système d'équations obtenu avec les deux équations en λ et μ ci-dessus.

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + \mu + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

La solution qui vérifie l'équation différentielle (E) et les conditions initiales données est :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Compléments : équations fonctionnelles.

39.2 Méthodes approchées de résolution d'équations

39.2.1 Principe de dichotomie

La méthode de dichotomie repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. Rappelons l'énoncé :

Théorème 39.62. *Théorème des valeurs intermédiaires*
On considère une fonction f continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Corollaire 39.63. *Théorème de bijection*
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

Remarques 39.64.

— Le T.V.I. s'utilise dans le cas où on demande qu'une équation du type $f(x) = k$ admet au moins une solution.

— Le T.V.I. ne permet pas de déterminer le nombre de solutions, ni de calculer la ou les solutions.

— Le théorème de la bijection s'utilise dans le cas où on demande de montrer qu'une équation du type $f(x) = k$ admet une unique solution.

— Grâce au théorème de la bijection et un découpage d'étude de la fonction f par intervalles où elle est monotone, on peut donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ et on peut approcher les solutions grâce à la méthode de dichotomie.

Théorème 39.65.
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Si $f(a) \times f(b) \leqslant 0$, alors il existe $\ell \in [a; b]$ tel que $f(\ell) = 0$.

On donne un algorithme qui met en place le principe de dichotomie pour une fonction f donnée.

```
def dicho(a,b,prec):
  while b-a > prec
  c = (a+b)/2
  if f(a)*f(c) <= 0:0
      b=c
  else:
      a=c
return a,b
```

Voici la version récursive de l'algorithme de dichotomie :

```
def dichotomie(a,b,prec):
  if b-a <= prec
    return a,b
  else:
    c = (a+b)/2
    if f(a)*f(c) <= 0:
       return dichotomie(a,c,prec)
     else:
       return dichotomie(c,b,prec)
```

Enfin, on donne un exemple d'application du principe de dichotomie pour la recherche de valeurs approchées de solutions d'équation.

▶ **Exercice 39.66.**
Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - 1$.

1. Calculer les limites de g en zéro et en l'infini.
2. Étudier les variations de g. Dresser le tableau de variations de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1;3]$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous (principe de dichotomie) :

```
A <- 1
B <- 3
Tant que B - A > 0,1 faire
  M <- 0,5 (A+B)
  Si g(M) < 0 alors
    A <- M
  Sinon
    B <- M
  Fin Si
Fin Tant que
```

   (a) Faire fonctionner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
A						
B						
$B-A$						
M						
$g(M)$						

   (b) Que représentent les contenus des variables A et B à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Solutions. $\diamondsuit$

1. On rappelle brièvement les limites de la fonction $x \mapsto \ln(x)$:
$$\lim_{x\to 0} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$
La limite de g en 0 se déduit par produit des limites : comme $\lim_{x\to 0} x = 0$:
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) - 1 = -1.$$
La limite de g en $+\infty$ se déduit par croissance comparée, la limite de x quand $x \to +\infty$ est $+\infty$ et toute puissance de x « l'emporte » sur le logarithme. Donc :
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) - 1 = +\infty.$$

2. g est de la forme $uv - 1$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi :

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

On étudie les variations de g en étudiant le signe de la dérivée de g. On a :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}.$$

Or :

$$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$$

(il n'y a pas de changement de symbole dans l'inéquation car $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$). On a aussi :

$$g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1}) - 1 = -1\mathrm{e}^{-1} - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1.$$

On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ -1	$\searrow$	$-1{,}36$	$\nearrow$	$+\infty$

3. — La fonction g est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$ et strictement négative donc il n'y a pas de solution pour l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
   — La fonction g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1};1\right]$ et strictement négative donc il n'y a pas de solution pour l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
   — La fonction g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[3;+\infty[$ et strictement positive donc il n'y a pas de solution pour l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
   — La fonction g est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[1;3]$. De plus :

$$g(1) = 1\ln(1) - 1 = 1 \times 0 - 1 = -1 < 0$$
$$g(3) = 3\ln(3) - 1 \approx 2{,}29 > 0$$

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1;3]$.

4. (a) En exécutant l'algorithme, on obtient les valeurs suivantes :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
A	1	1	1,5	1,75	1,75	1,75
B	3	2	2	2	1,875	1,8125
$B - A$	2	1	0,5	0,25	0,125	$0{,}0625 < 0{,}1$
M	2	1,5	1,75	1,875	1,8125	ARRET
$g(M)$	$0{,}38 > 0$	$-0{,}39 < 0$	$-0{,}02 < 0$	$0{,}17 > 0$	$0{,}07 > 0$	

   (b) Les contenus des variables A et B à la fin de l'algorithme nous donne un encadrement de l'unique solution α de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[1;3]$. On a ainsi : $1,75 < \alpha < 1,8125$ avec une amplitude de $\dfrac{1}{2^4}$.

□

39.2.2 Méthode de la sécante

Pour une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, et vérifiant $f(a) \leqslant 0$, $f(b) > 0$, on trace le segment $[AB]$ où A est le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B coordonnées $(b; f(b))$. Si le segment reste au dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a', 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la *sécante*. On recommence en partant maintenant de l'intervalle $[a'; b]$ pour obtenir une valeur a''.

Proposition 39.67.
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) > 0$. Alors la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est croissante et converge vers la solution ℓ de $f(x) = 0$.

L'hypothèse f est convexe signifie exactement que pour tout x, x' dans $[a;b]$ la sécante (ou corde) entre $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est au-dessus du graphe de f.

Une démonstration de la proposition est donnée dans le document : « A. Bodin & al., *Zéros des fonctions*, Exo7. »

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition. On donne l'algorithme pour la mise en place de la méthode de la sécante.

```
def secante(a,b,n):
  for i in range(n):
        a = a-f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
  return a
```

39.2.3 Méthode de Newton-Raphson

On présente une autre méthode numérique pour la résolution d'équations. Comme le principe de dichotomie, elle repose sur le calcul d'une récurrence qui part d'un point x_0 et qui, de proche en proche, tend vers la racine s.

Théorème 39.68.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]\alpha; \beta[$, qui vérifie les hypothèses suivantes :

- (H_1) : il existe deux réels a et b tels que $\alpha < a < b < \beta$ et $f(a)f(b) < 0$;
- (H_2) : f est dérivable dans l'intervalle I ; la fonction dérivée f' ne prend pas des valeurs > 0 dans cet intervalle ;
- (H_3) : f' est strictement croissante dans I ;
- (H_4) : f' est continue dans I.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule s dans l'intervalle $[a;b]$. De plus, on définit par récurrence une suite (x_n) à partir de tout point x_0 de l'intervalle $]s;b]$ en posant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cette suite est strictement décroissante et converge vers s.

Démonstration. D'après (H_2), f est continue sur l'intervalle $[a;b]$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, d'après (H_1), f s'annule dans $]a;b[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

D'après (H_2), $f' > 0$ dans I, f y est donc strictement croissante. Comme $f(s) = 0$, on en déduit que, dans I, f ne prend que des valeurs < 0 avant s et des valeurs > 0 après. N'importe quel point de l'intervalle $]s;b]$ peut être choisi comme point x_0. Comme s est inconnu, on peut choisir b ou tâtonner.

La tangente (T_0) coupe l'axe des abscisses au point noté B d'abscisse :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Le point $(s;0)$ est appelé A. Le problème est de démontrer que A, B et $H_0 = (x_0;0)$ sont rangés dans cet ordre. C'est une propriété élémentaire de convexité du graphe : en effet, la pente du segment $[AM_0]$ est égale à $\dfrac{f(x_0)}{x_0 - s}$ est, d'après le théorème des accroissements finis, une valeur prise par la fonction f' dans l'intervalle $]s;x_0[$. Comme f' est strictement croissante dans I (hypothèse (H_3)), cette pente est strictement plus petite que la pente de la tangente (T_0). Comme enfin (H_0M_0) est perpendiculaire à l'axe des abscisses, les points A, B et H_0 sont bien dans l'ordre indiqué.

Il résulte que la suite (x_n) se trouve dans l'intervalle $]s;b]$ et est strictement décroissante. En tant que suite décroissante et minorée, elle converge. Notons sa limite ℓ. D'après l'hypothèse (H_4), la suite $(f'(x_n))$ converge vers $f(\ell)$ et $f'(\ell) \neq 0$ (d'après l'hypothèse (H_2)). De même que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$. En passant par la limite dans la relation de récurrence, on obtient donc l'égalité $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, qui prouve que $f(\ell) = 0$ puis que $\ell = s$. □

39.3 Autres types d'équations

39.3.1 Équation bicarrées (P)

Définition 39.69.
Une équation bicarrée est une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec a, b et c trois nombres et a non nul.

Pour résoudre une équation bicarrée, on peut faire un changement de variables $y = x^2$ et résoudre l'équation intermédiaire $ay^2 + by + c = 0$ (voir méthode de résolution dans la section 1.2).

Théorème 39.70.
Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation intermédiaires, les solutions finales de l'équation bicarrée associée sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{y_1} \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{y_1} \text{ si } y_1 \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et si } y_1 \geqslant 0\,; \\ x_3 &= \sqrt{y_2} \quad \text{et} \quad x_4 = -\sqrt{y_2} \text{ si } y_2 \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et si } y_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Exemple 39.71.
On veut résoudre l'équation $2x^4 + x^2 - 1$. Pour cela, on pose $y = x^2$ et on est ramené à une équation du second degré :

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant du polynôme en y :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Il y a donc deux solutions pour l'équation intermédiaire :

$$y_1 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or $y_1 < 0$ donc on ne peut pas le prendre en compte dans les solutions finales.

Les solutions finales sont donc :

$$x_1 = \sqrt{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

39.3.2 Équations irrationnelles (P)

Définition 39.72.
Une équation où l'inconnue figure sous un radical est dite *irrationnelle*. Pour résoudre une telle équation, on est amené à élever les deux membres d'une égalité à la puissance n pour éliminer le radical $\sqrt[n]{\ }$.

Exemple 39.73.
On souhaite résoudre l'équation : $\sqrt{2+x}+4-\sqrt{10-3x}=0$. Tout d'abord on isole le radical :

$$\sqrt{2+x}+4-\sqrt{10-3x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x}+4=\sqrt{10-4x}$$

On élève les deux membres de l'équation au carré :

$$\Leftrightarrow 2+x+8\sqrt{2+x}+16=10-3x \Leftrightarrow 8\sqrt{2+x})8-4x \Leftrightarrow 2\sqrt{2+x}=2-x$$

On élève encore les deux membres de l'équation pour se débarrasser du dernier radical :

$$\Leftrightarrow 4(2+x)=4+4x+x^2 \Leftrightarrow x^2=4.$$

On obtient deux solutions potentiels à l'équation $x_1=-2$ et $x_2=2$. On vérifie si les deux solutions potentiels vérifient l'équation :

$$\sqrt{2-2}+4-\sqrt{10-3\times(-2)} = 0+4-\sqrt{10+6} = 0+4-\sqrt{16}=0.$$
$$\sqrt{2+2}+4-\sqrt{10-3\times(+2)} = \sqrt{4}+4-\sqrt{10-9} = 2+4-1=5\neq 0.$$

Seule la solution $x_1=-2$ satisfait l'équation proposée.

39.3.3 Équations trigonométriques (P)

On peut résoudre des équations du type $\cos(x)=a$ ou $\sin(x)=a$ avec $a\in\mathbb{R}$.

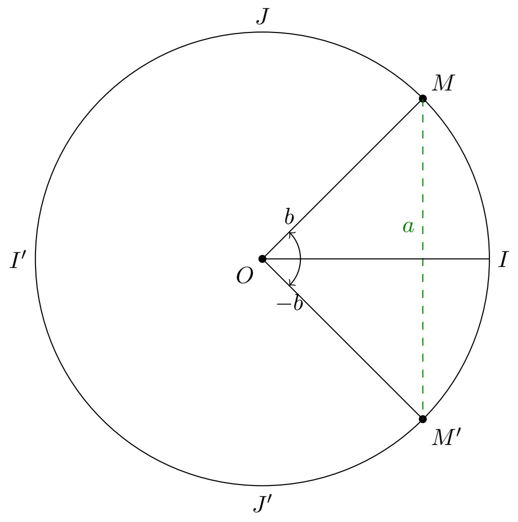
Propriété 39.74. *Equations cosinus*
On souhaite résoudre l'équation $\cos(x)=a$.

- Si $a<-1$ ou $a>1$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $a=-1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :
$$\{\pi+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$
- Si $a=1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :
$$\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$
- Si $-1<a<1$, il existe un unique nombre b dans $]0;\pi[$ tel que $a=\cos(b)$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x)=a$ est :
$$\{b+2k\pi \quad \text{et} \quad -b+k\times 2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

▶ Méthode 39.75.
Dans le cas général, $a \in]-1;1[$, on peut trouver un unique nombre b dans $]0;\pi[$ tel que $a = \cos(b)$. Les solutions de $\cos(x) = \cos(b)$ sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont $-b$ et b.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π :

$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad -b + k \times 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



Exemple 39.76.
On souhaite résoudre dans $]-\pi;\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$. On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. L'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions. Les deux solutions précédentes sont encore valables plus toutes celles que l'on obtient en ajoutant ou en soustrayant un nombre entier de fois 2π.

Les solutions sont $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 39.77. *Équations sinus*
On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) = a$.

— Si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation n'admet pas de solution.

— Si $a = -1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

— Si $a = 1$ alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

— Si $-1 < a < 1$, il existe un unique nombre b dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \sin(b)$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = a$ est :

$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad \pi - b + k \times 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

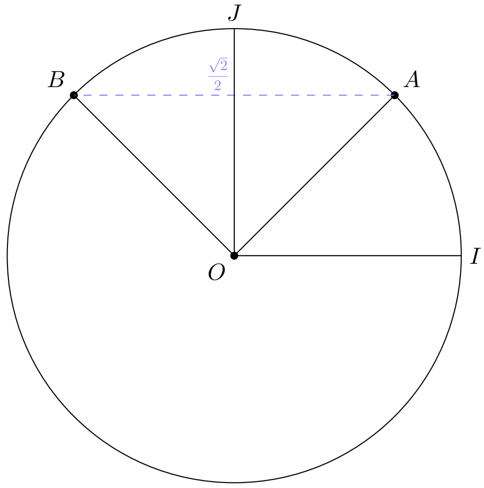
▶ Méthode 39.78.
Dans le cas général $a \in]-1;1[$, il existe un unique nombre b dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \sin b$. L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π :

$$\{b + 2k\pi \quad \text{et} \quad \pi - b + k \times 2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 39.79.

On veut résoudre l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$. On remarque l'équation est équivalente à $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.



Les solutions de cette équation dans $]-\pi;\pi]$ sont $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ dont les points-images sur le cercle sont A et B. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

39.3.4 Taux moyen (P)

Propriété 39.80.
Soit a un nombre strictement positif, n un entier naturel non nul. L'équation $x^n = a$ d'inconnu x admet une unique solution notée $x = a^{1/n}$ (a puissance $1/n$).

L'équation $x^n = a$ se résout de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x^n = a &\Leftrightarrow (x^n)^{1/n} = (a)^{1/n} \\ &\Leftrightarrow x^{n \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x^1 = a^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

On note aussi $a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a}$, la racine $n$ième de a.

Définition 39.81. *Moyenne géométrique*
Soient c_1, c_2, …, c_n n nombre réels strictement positifs. On appelle moyenne géométrique de ces nombres, le réel :

$$c = (c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Définition 39.82.
Supposons que sur n intervalles de temps, un produit subisse une évolution globale de t. Le *taux d'évolution moyen* t_M, est le taux d'évolution qu'il devra subir pendant n intervalles de temps pour qu'au final, l'évolution soit de $t\%$.

Le taux d'évolution moyen est donné par l'équation :

$$(1 + t_M)^n = 1 + t$$

où t est le taux d'évolution globale à l'issue des n évolutions.

En résolvant l'équation donné, on obtient :

Propriété 39.83.
Avec les notations précédentes, le taux d'évolution moyen t_M est donné par :

$$1 + t_M = (1+t)^{1/n}$$

où t est le taux d'évolution globale à l'issue des n évolutions.

▶ **Exercice 39.84.**
Un produit a augmenté de 20% en 5 ans. Quelle est son évolution annuelle moyenne ?

Solution. On note t_M le taux d'évolution moyen annuel. Le taux global est de 20%, le coefficient multiplicateur traduisant une hausse de 20% est égal à $1+0{,}2 = 1{,}2$.

Ainsi, pour trouver t_M, il faut résoudre l'équation suivante :

$$(1+t_M)^5 = 1{,}2 \Leftrightarrow 1 + t_M = 1{,}2^{1/5} = 1{,}037 \Leftrightarrow t_M = 1{,}037 - 1 = 0{,}037.$$

Conclusion, si en 5 ans, un produit a augmenté de 20%, en moyenne, il a augmenté de 3,7% par an. □

39.3.5 Équations du second degré à coefficients complexes (HP)

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. On note Δ le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$$

Soit δ le complexe tel que $\delta^2 = \Delta$ (l'existence de ce nombre complexe peut être prouvé en résolvant les équations du type $z^2 = z_0$ où z_0 est un nombre complexe). La forme canonique permet de conclure :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$$

et en factorisant, on retrouve des formules semblables à celles connues dans $\mathbb{R}$:

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Remarque 39.85.
Attention, les nombres z_1 et z_2 ne sont pas nécessairement conjugués.

Exemple 39.86.
On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1+\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i}z - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 - 4(1+\mathrm{i})(-1) = -1 + 4(1+\mathrm{i}) = 3 + 4\mathrm{i}.$$

On cherche un complexe δ tel que : $\delta^2 = 3 + 4\mathrm{i}$. On peut vérifier que le nombre $\delta = 2 + \mathrm{i}$ convient. On en déduit alors les deux solutions de l'équation :

$$z_1 = \frac{-\mathrm{i} - (2+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{-2-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = -1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-\mathrm{i}+(2+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{2}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

39.3.6 Équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (HP)

On peut s'intéresser aux équations du premier degré et second degré où les coefficients et solutions sont des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Équations du premier degré

1) $\overline{x} + \overline{a} = \overline{b}$

L'équation $\overline{x} + \overline{a} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut se retrouver très facilement. Ce revient à rechercher l'opposé de $\overline{a}$ qui est $\overline{-a} = \overline{n-a}$ puis :

$$\overline{x} + \overline{a} \ = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{b} + \overline{-a} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{b+n-a}.$$

2) $\overline{ax} = \overline{b}$

On veut résoudre l'équation $\overline{ax} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On se place d'abord dans le cas où a est premier avec n.

Ici, on aura besoin de la notion de PGCD pour introduire les résultats suivants.

Théorème 39.87.
$\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a et n sont premiers entre eux, c'est-à-dire si $\&textPGCD(a,n) = 1$.

On utilise le lemme de Gauss (théorème énoncé plus haut dans la leçon)

Théorème 39.88. *Lemme de Gauss*
Soient a, b et c trois entiers. On suppose que a divise le produit bc et que a et b sont premiers entre eux. Alors a divise c.

On peut faire la remarque suivante :

Remarque 39.89.
Si p est un nombre premier, les entiers $1, \dots, p-1$ sont tous premiers avec p. Ainsi, tout élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible. Ainsi, la résolution de l'équation $\overline{ax} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se déroule comme pour la résolution de l'équation $ax = b$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit juste de faire attention à ce que le nombre par lequel on divise soit non nul.

Exemple de table d'inverses de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$\overline{a}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{a}^{-1}$		$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$

Dans le cas général, on note $d = \&textPGCD(a,n)$ et on suppose que $d \neq 1$. On veut résoudre l'équation $\overline{ax} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si b n'est pas un multiple de d, l'équation n'a pas de solution.

Si maintenant b est un multiple de d alors l'équation est équivalente à :

$$\left(\frac{a}{d}\right) x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}.$$

Les quantités $\frac{a}{d}$ et $\frac{n}{d}$ sont premières entre elles, donc on peut inverser $\frac{a}{d}$ modulo $\frac{n}{d}$.

Remarque 39.90.
Les solutions sont définies modulo $\frac{n}{d}$ donc s'il l'on veut résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on aura d solutions.

Exemple 39.91.
On veut résoudre l'équation $\overline{4}\overline{x} = \overline{2}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. 4 et 10 ne sont pas premiers entre eux, leur $\&textPGCD$ est 2. Comme 2 est multiple de 2, il y aura deux solutions à l'équation.

On peut alors diviser l'équation par 2, l'équation initiale est équivalente à l'équation $\overline{2}\overline{x} = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $\overline{2}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, c'est la classe $\overline{3}$. On multiple donc notre équation par $\overline{3}$ et on obtient :

$$\overline{x} = \overline{3}$$

dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Les solutions dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sont donc $\overline{3}$ et $\overline{8}$.

Équations puissance

On souhaite maintenant résoudre l'équation $\overline{a}^{\overline{x}} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Tout d'abord, un mot sur les puissances successives de $\overline{a}$. On peut montrer que la suite $(\overline{a}^k)_k$ est périodique car l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini. Il existe donc deux entiers i et j $(i < j)$ tels que $u_i = u_j$.

Plus précisément, la suite $(\overline{a}^k)_k$ est de période $j - i$ au moins à partir du rang i mais il n'est pas forcément vrai que cette suite est périodique à partir du rang 0, c'est le cas où $\overline{a}$ ne serait pas inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on aurait alors $\overline{a}\overline{a}^{k-1} = 1$, ce qui serait en total contradiction avec la non-inversibilité de $\overline{a}$).

On donnera une méthode pour déterminer la période de la suite quand $\overline{a}$ est inversible.

1) Cas où a est premier avec n

Lorsque a est premier avec n, la suite $(\overline{a}^k)$ est périodique à partir du rang 0. Il existe des entiers $i < j$ tels que :

$$\overline{a}^i = \overline{a}^j.$$

Si on note $\overline{a'}$ un inverse de $\overline{a}$, c'est-à-dire $\overline{a}\overline{a'} = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut multiplier l'égalité précédente par $(\overline{a'})^i$. Il vient :

$$\overline{a}^{j-i} = \overline{1}$$

ce qui prouve bien ce que l'on veut.

2) Fonction indicatrice d'Euler

On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Si $n \geqslant 2$ est un entier, $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n. C'est le cardinal de l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ensemble que l'on note aussi $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$).

Théorème 39.92.
Soit $\overline{a}$ un inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors :

$$\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}.$$

ou dans sa version « congruences » :

Théorème 39.93.
Soit a et n deux entiers premiers entre eux. Alors :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Si $n = p$ un nombre premier, tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont inversibles. On a : $\varphi(p) = p-1$ et le théorème nous dit que si $\overline{a} \in \mathbb{Z}/Z\mathbb{Z}$ tel que $\overline{a} \neq \overline{0}$ alors $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$. Si $\overline{a}$ est nul, on peut multiplier l'égalité précédente par $\overline{a}$.

On a ainsi le petit théorème de Fermat :

Théorème 39.94. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier. Pour tout $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a l'égalité :

$$\overline{a}^p = \overline{a}.$$

ou dans sa version « congruences »

Théorème 39.95. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier. Pour tout entier a, on a la congruence :

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

On termine cette section en donnant une formule pour $\varphi(n)$ dans le cas général.

Théorème 39.96.
Si la décomposition en facteurs premiers de l'entier n est :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

alors $\varphi(n)$ peut se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Équations du second degré

On se limite au cas de l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier impair.

On utilise pour résoudre l'équation $\overline{ax} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c} = 0$, la méthode du discriminant :

$$\begin{aligned}\overline{ax} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c} = 0 &\Leftrightarrow \overline{a}\left(\overline{x}^2 + \frac{\overline{b}}{\overline{a}}\overline{x} + \frac{\overline{c}}{\overline{a}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{a}\left(\overline{x} + \frac{\overline{b}}{\overline{2a}}\right)^2 - \frac{\overline{b}^2}{\overline{4a}} + \frac{\overline{c}}{\overline{a}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overline{x} + \frac{\overline{b}}{\overline{2a}}\right)^2 = \frac{\overline{\Delta}}{\overline{4a}^2}.\end{aligned}$$

où $\overline{\Delta} = \overline{b}^2 - \overline{4}\overline{ac}$.

Les divisions par $\overline{2}$, $\overline{4}$ et $\overline{a}$ correspondent respectivement aux multiplications par les inverses de ces nombres. C'est pour cela qu'il est important de supposer que p est impair.

Il s'agit maintenant de déterminer une racine carrée de $\overline{\Delta}$, c'est-à-dire un élément $\delta \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\overline{\delta}^2 = \overline{\Delta}$. Il existe un critère pour savoir dans un premier temps si un tel élément existe. Supposons qu'on ait trouvé un tel élément. L'équation devient :

$$\begin{gathered}\left(\overline{x} + \frac{\overline{b}}{\overline{2a}}\right) = \left(\frac{\overline{\delta}}{\overline{2a}}\right)^2 \\ \left(\overline{x} + \frac{\overline{b} + \overline{\delta}}{\overline{2a}}\right)\left(\overline{x} - \frac{\overline{b} + \overline{\delta}}{\overline{2a}}\right) = \overline{0}\end{gathered}$$

On a donc une équation produit nulle et on peut déduire que l'un des facteurs est nul car p est premier (si tel ne serait pas le cas (premier facteur nul), il est inversible et on trouverait que le deuxième facteur est nul après avoir multiplié par l'inverse en question).

39.4 Bien faire la différence...

39.4.1 ... entre inconnu et paramètre

Un paramètre est une variable susceptible de recevoir une valeur constante pour un cas déterminé et qui désigne certains coefficients ou certaines quantités en fonction desquels on veut exprimer une proposition ou les solutions d'un système d'équations.

39.4.2 ... entre équation et identité

Une équation est une égalité qui n'est pas nécessairement vraie pour toutes les valeurs possibles que peut prendre la variable.

LEÇON

40 Exemples de modèles d'évolution.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : Terminale Complémentaires (ou Spécialité).

Prérequis : suites numériques, limites, étude de fonctions, fonctions exponentielles, équations différentielles.

Références :

[1] Manuel Sesamath, *Terminale Complémentaires*, Magnard 2020. [url]

[2] M. Cameri, *Mathématiques complémentaires, Chapitre 01 : Modèles d'évolution, modèle discret* [url]

[3] M. Cameri, *Mathématiques complémentaires, Chapitre 01 : Modèles d'évolution, modèle continu* [url]

[4] S. Mirbel, *Modèle d'évolution discret, suites* Lycée Gay Lussac, Limoges (math-adore.fr). [url]

[5] S. Mirbel, *Modèle d'évolution continu, équations différentielles, primitives* Lycée Gay Lussac, Limoges (math-adore.fr). [url]

[6] N. Peyrat, *Terminale Maths Complémentaire, Thème 02 : Évolution - Modèles discrets* Lycée Saint-Charles. [url]

[7] N. Peyrat, *Terminale Maths Complémentaire, Thème 03 : Évolution - Modèles continus* Lycée Saint-Charles. [url]

[8] M. Cameri, *Mathématiques complémentaires, Chapitre 02 : Modèles définis par une fonction d'une variable* [url]

[9] Contributeurs à Wikipedia, *Évolution*, Wikipédia, l'encyclopédie libre, 25 septembre 2022. [url]

[10] Contributeurs à Wikipedia, *Modélisation*, Wikipédia, l'encyclopédie libre, 25 septembre 2022. [url]

40.1 Définition d'un modèle d'évolution

[9] [10]

40.2 Modèles d'évolutions discrets : les suites

40.2.1 Rappel de cours sur les suites numériques

(développement) [1] [2] [4] [6]

40.2.2 Évolution d'un capital, amortissement d'une dette

[2, III.1]

40.2.3 Loi de décroissance radioactive

[2, III.2]

40.2.4 Loi de refroidissement de Newton

[2, III.3]

40.2.5 Modèle de Malthus, modèle de Verhulst

[2, III.4]

40.2.6 Modèle proie prédateur

[2, III.5]

40.3 Modèles d'évolutions continus utilisant les fonctions

40.3.1 Taux d'alcoolémie

[1, p 247]

40.3.2 Évolution d'une population, étude de fonctions

[1, p 251]

40.3.3 Étude d'une épidémie

[7, III.2]

40.4 Modèles d'évolutions continus vérifiant une équation différentielle

40.4.1 Rappel de cours sur les équations différentielles

[1]

40.4.2 Loi de décroissance radioactive, modèle continu

[3, III.1]

40.4.3 Charge d'un condensateur

[3, III.2]

40.4.4 Chute d'un corps dans un fluide visqueux

[3, III.3]

40.4.5 Dynamique des populations, modèles continus

[3, III.4] [1, p 256]

LEÇON

41

Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme.

Préambule

Niveau : troisième (brevet) puis classes du lycée

Prérequis : notions de programmation, notion d'arithmétique (PGCD), notions d'analyse (fonctions, croissance), notions de probabilités (calcul de probabilités et loi forte des grands nombres).

Références :

[1] Contributeurs de Wikipédia, *Algorithmique*. Wikipédia.

[2] Algobox, *Gallerie d'algorithmes*. URL : `http://xm1math.net/algobox/gallerie.html`.

[3] APMEP, *Brevet des collèges Amérique du Nord 5 juin 2018* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. URL : `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Brevet_Amerique_du_Nord_5_juin_2018_FK_2.pdf`.

[4] APMEP. *Corrigé, Brevet des collèges Amérique du Nord 5 juin 2018*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. URL : `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Brevet_Amerique_du_Nord_5_juin_2018_FK_2.pdf`.

[5] Unknown, *Concours de recrutement de professeurs des écoles, PE2-17-PG1*. Session 2017, URL : `http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/2017/77/6/s2017_crpe_math_gr1_754776.pdf`.

[6] G. Julia, Epreuve sur dossier au CAPES de Mathématiques. URL : `http://gjmaths.pagesperso-orange.fr/epdos.html`.

[7] APMEP. *Baccalauréat S Pondichéry 26 avril 2017*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. URL `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S-Pondichery-26-avril-2017.pdf`.

[8] APMEP. *Corrigé, Baccalauréat S Pondichéry 26 avril 2017*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. URL : `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_AD_S_Pondichery_26_avril_2017_ecran.pdf`.

[9] APMEP. *Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. URL : `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Nlle_Caledonie_S_mars_2016.pdf`.

[10] APMEP. *Corrigé, Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. URL : `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Nlle_Caledonie_S_mars_2016_FH.pdf`.

Le contenu provient de la leçon n° 28 de la session 2022 : « Problèmes conduisant à l'utilisation d'algorithmes ».

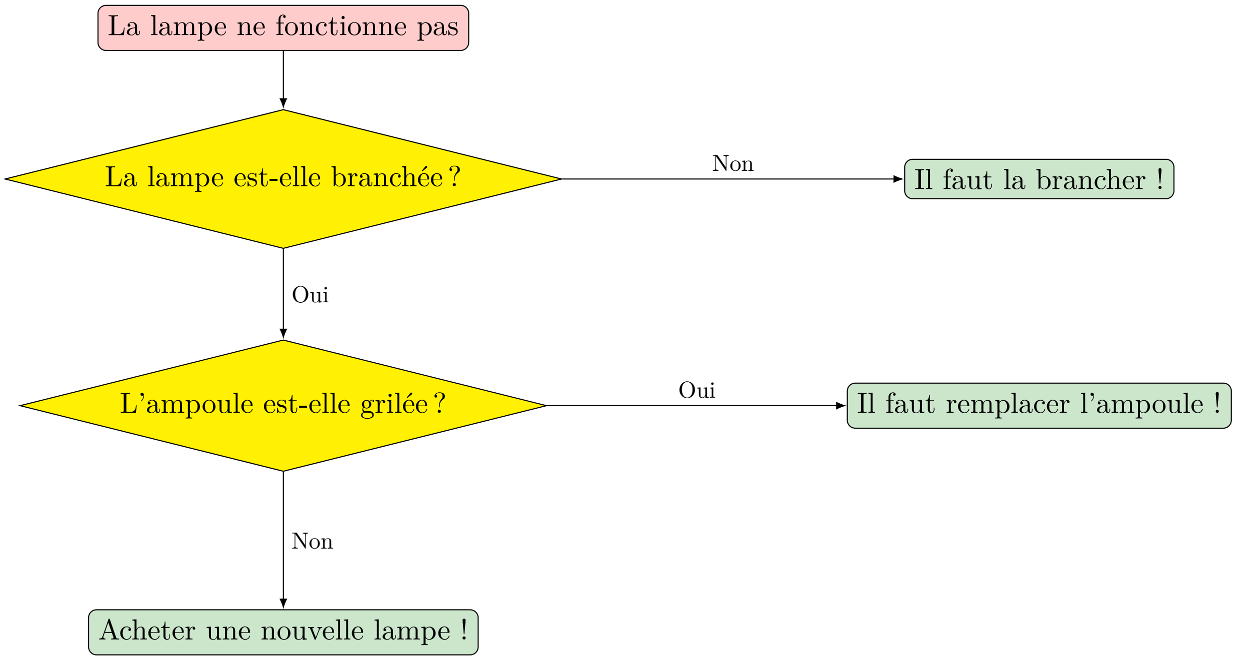
41.1 Définition d'un algorithme

Définition 41.1. *Algorithme*

Un *algorithme* est une suite finie d'opérations et d'instructions permettant de résoudre un problème.

Exemple 41.2.

On donne l'exemple d'un algorithme (un peu tordu) pour savoir ce qu'on doit faire quand une lampe ne fonctionne plus mis sous forme d'un organigramme.



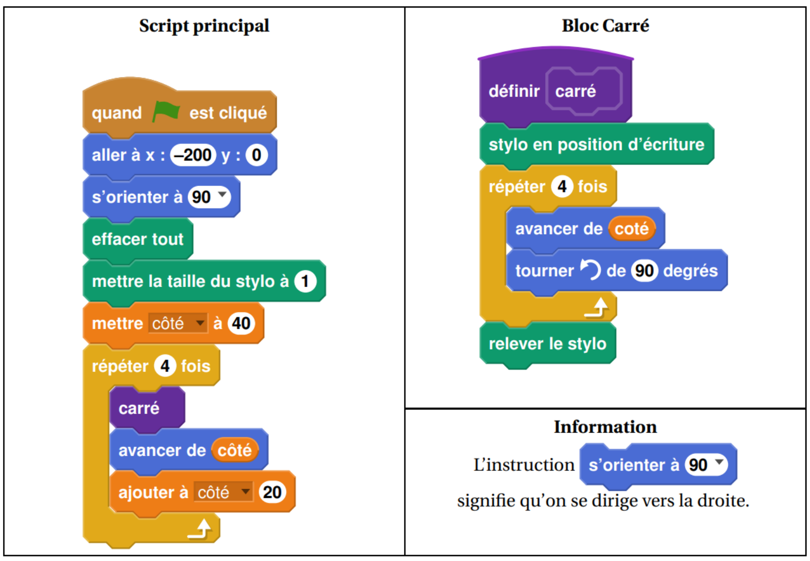
41.2 La géométrie sous Scratch (Brevet)

D'après : Brevet des collèges, Amérique du Nord 2018, Exercice 4

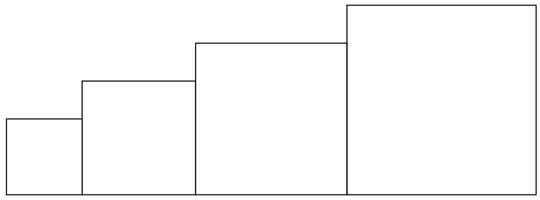
▶ **Exercice 41.3.**

Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue.

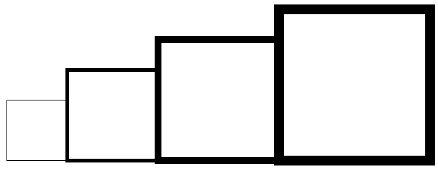
Simon travaille sur un programme. Voici des copies de son écran :



1. Il obtient le dessin ci-contre.
   (a) D'après le script principal, quelle est la longueur du côté du plus petit carré dessiné ?
   (b) D'après le script principal, quelle est la longueur du côté du plus grand carré dessiné ?



2. Dans le script principal, où peut-on insérer l'instruction `ajouter 2 à la taille du stylo` de façon à obtenir le dessin ci-contre ?



3. On modifie maintenant le script principal pour obtenir celui qui est présenté ci-dessous :

   Parmi les dessins ci-dessous, lequel obtient-on ?

◊ *Solutions.* 1. (a) Au départ, `côté` est mis à 40 ; le premier carré a ses côtés de longueur 40.
(b) À chaque fois `côté` est augmenté de 20, donc le dernier carré a pour longueur de ses côtés :

$$40 + 20 + 20 + 20 = 100.$$

2. Il faut augmenter la taille du stylo à la fin de chaque tracé de carré, donc après l'instruction : `ajouter à côté 20`.
3. On obtient le dessin n° 3.

□

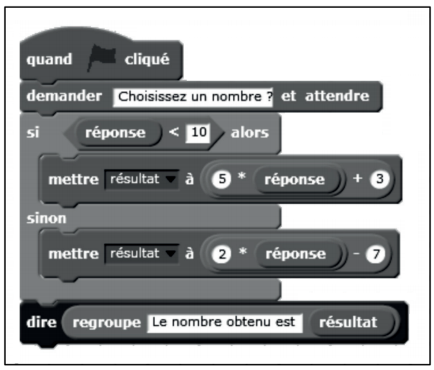
41.3 Un programme de calcul sous Scratch (CRPE)

D'après : CRPE 2017 Partie II Exercice 2

▶ **Exercice 41.4.**

On utilise le programme ci-contre.

1. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 7 ?
2. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 12,7 ?
3. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nomrbe -6 ?



◊ *Solutions.* 1. La réponse 7 est bien strictement inférieure à 10 donc la condition de boucle est respectée. On a donc :

$$\texttt{résultat} := 5 \times 7 + 3 = 35 + 3 = 38.$$

2. La réponse 12,7 est supérieure ou égale à 10 donc la condition de boucle n'est pas respectée, on prend l'instruction sinon. On a :

$$\texttt{résultat} := 2 \times 12{,}7 - 7 = 25{,}4 - 7 = 18{,}4.$$

3. La réponse -6 est bien strictement inférieure à 10 (car un nombre négatif est toujours inférieur à un nombre positif) donc la condition de boucle est respectée. On a donc :

$$\texttt{résultat} := 5 \times -6 + 3 = -30 + 3 = -27.$$

□

41.4 Le problème des photocopieuses

Dossier CAPES session 2018 - Troisième Concours

Dans un magasin de reprographie, il existe deux types de photocopieurs.

Le prix des photocopies effectuées en utilisant le *photocopieur de type A* est obtenu à l'aide de la fonction `prixtotal` programmée ci-contre en langage Python.

```
def prixtotal(n):
    if n<=50:
        prix=n*0.1
    if 50<n and n<=200:
        prix=5+(n-50)*0.05
    if n>200:
        prix=12.5+(n-200)*0.02
    return prix
```

Le *photocopieur de type B* fonctionne à l'aide d'une carte vendue 15 €. Cette carte permet d'effectuer 200 photocopies puis à partir de la 201^e, la photocopie est facturée 0, 01 €.

Déterminer en fonction du nombre de photocopies réalisées, le type de photocopieur à utiliser.

◊ *Solutions.* Soit x le nombre de photocopies effectuées. On note $A(x)$ le prix de x photocopies effectuées en utilisant la photocopieuse de type A. On a alors :

$$A(x) = \begin{cases} 0,1x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 5 + (x-50) \times 0{,}05 & \text{si } 50 \leqslant x \leqslant 200 \\ 12{,}5 + (x-200) \times 0{,}02 & \text{si } x \geqslant 200 \end{cases}$$

On note $B(x)$ le prix de x photocopies effectuées en utilisant la photocopieuse de type B.

$$B(x) = \begin{cases} 15 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 200 \\ 15 + (x-200) \times 0{,}01 & \text{si } x \geqslant 200 \end{cases}$$

On peut d'ors et déjà donner un intervalle d'étude pertinent pour la résolution de l'inéquation $A(x) \leqslant B(x)$. En effet, pour $0 \leqslant x \leqslant 200$, $B(x) = 15$ et $A(x) \leqslant 15$. Donc on résout l'inéquation proposée pour $x \geqslant 200$. Dans ces conditions : $A(x) = 12{,}5 + (x-200) \times 0{,}02$ et $B(x) = 15 + (x-200) \times 0,01$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} A(x) \leqslant B(x) &\Leftrightarrow 12{,}5 + (x-200) \times 0{,}02 \leqslant 15 + (x-200) \times 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow (x-200) \times 0{,}02 - (x-200) \times 0{,}01 \leqslant 15 - 12{,}5 \\ &\Leftrightarrow 0{,}01(x-200) \leqslant 2{,}5 \Leftrightarrow x - 200 \leqslant 250 \Leftrightarrow x \leqslant 450. \end{aligned}$$

À partir de 450 photocopies, le tarif de la photocopieuse de type B est plus avantageux que la photocopieuse de type A. □

41.5 Jeu de dés

1. On lance n fois un dé équilibré. Déterminer la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6.
2. Pour trouver le nombre minimal de lancers pour qu'on ait $p_n \geqslant 0{,}99$, Jean a voulu créé le programme codé en Python suivant :

```
n = 0
while p > 0.99:
   n = n+1
   p = ......
print(n)
```

mais il ne fonctionne pas.

   (a) Compléter et corriger le programme pour qu'il affiche en sortie le nombre minimal de lancers tel que $p_n \geqslant 0,99$.

   (b) Déterminer le nombre minimal de lancers pour qu'on ait $p_n \geqslant 0,99$.

♢ *Solutions.* 1. Soit X_n le nombre de fois que l'on obtienne un 6 lors de n lancers d'un dé équilibré ($n \in \mathbb{N}^*$). Les expériences sont répétés identiquement et sont indépendants les unes aux autres. Ainsi, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$ (proba d'obtenir un 6). On veut calculer la probabilité de l'événement « $X_n \geqslant 1$ ». Pour cela, on utilise la probabilité de l'événement contraire « $X_n < 1$ ».

$$p_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n < 1).$$

Or, les valeurs possibles de X_n appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. Ainsi, $X_n < 1$ équivaut à l'événement $X_n = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} p_n &= P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n < 1) = 1 - P(X_n = 0) \\ &= 1 - \left(\binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

2. (a) On corrige et complète le programme de Jean :

```
n = 0
p = 0
while p < 0.99:
   n = n+1
   p = 1 - (5/6)**n
print(n)
```

   (b) On veut déterminer le nombre minimal de lancers pour qu'on ait $p_n \geqslant 0{,}99$. Pour cela, on résout l'inéquation $p_n \geqslant 0{,}99$.

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0{,}99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant -0{,}01 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0{,}01). \end{aligned}$$

Ici, on doit changer le sens du signe de l'inéquation car $\frac{5}{6} < 1$ et $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$.

$$p_n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \Leftrightarrow n \geqslant 25{,}26.$$

Conclusion : À partir du 26$^{\text{e}}$ lancer de dés, la probabilité d'obtenir au moins un 6 est supérieure à 0,99.

□

41.6 Le lièvre et la tortue

▶ **Exercice 41.5.**
Les règles du lièvre et de la tortue suit les principes du programme codé en Python suivant :

```
from random import *
def lievretortue():
  tourde=randint(1,6)
  tortue=0
  while (tourde!=6) and (tortue<6):
    tourtue=tortue+1
    tourde=randint(1,6)

  if (tortue==6):
    gagnant="tortue"
  else:
    gagnant="lievre"

  return gagnant
```

1. Tester quelques exécutions du programme sur votre calculatrice.
2. Modifier le programme pour qu'il affiche le nombre de fois que la tortue gagne en un nombre n très grand de parties.
3. Quelle est la probabilité que la tortue gagne ?

◊ *Solution.* 1.

2.

3. On note T_G l'événement :
$$T_G = \{\text{la tortue gagne la partie}\}.$$
Pour que la tortue avance d'une case, il faut que le dé ne tombe pas sur le 6 donc sur, 1, 2, 3, 4 et 5. Donc, si on note :
$$T_C = \{\text{la tortue avance d'une case}\},$$
la probabilité que l'événement T_C ait lieu est de :
$$P(T_C) = \frac{5}{6}.$$
Ainsi,
$$P(T_G) = P(T_C)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{5^6}{6^6} \approx 0{,}335.$$

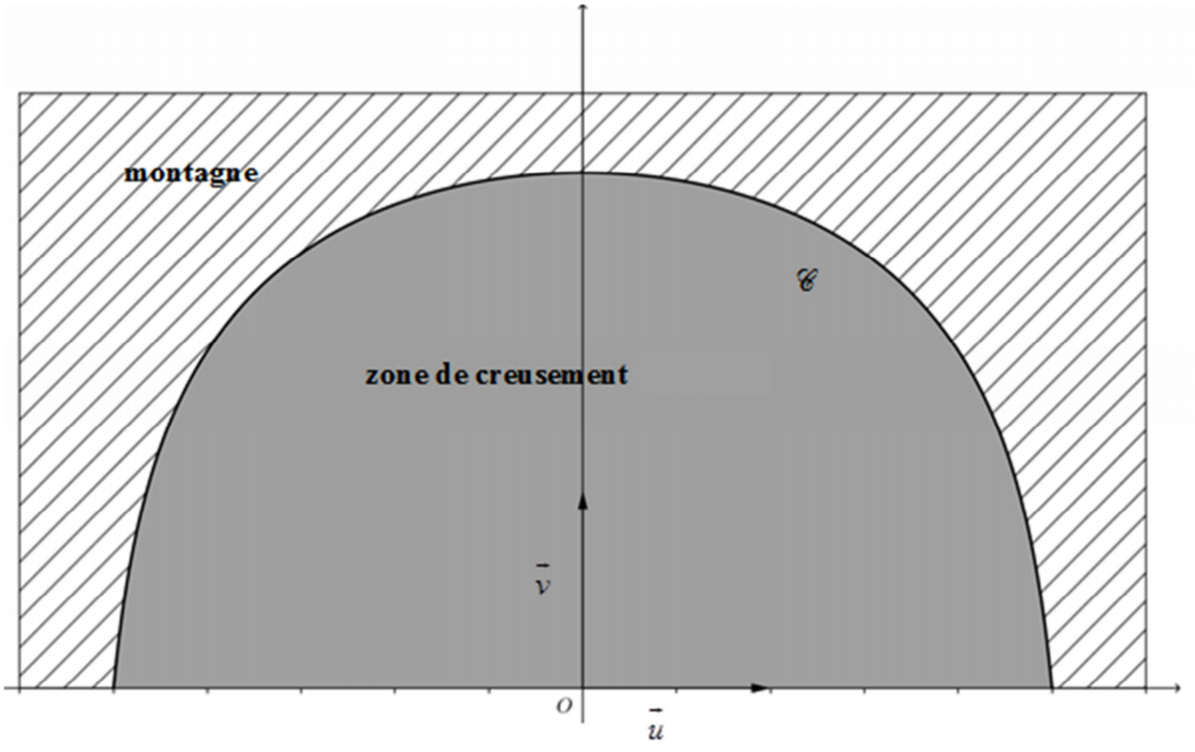
□

41.7 Calcul approchée d'intégrales (BAC Pondichéry 2017)

D'après : BAC Pondichéry 2017, Exercice 2

▶ **Exercice 41.6.**
Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.

Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2{,}5; 2{,}5]$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

[...]

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. (...)
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe (page suivante), permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a. On admet que :

$$a \leqslant I \leqslant a + \frac{f(0) - f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5$$

◊ *Solution.* 1. (...)

2. La courbe $\mathscr{C}$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et au dessus de l'axe des abscisses, l'aire est donnée par $2\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ en unité d'aire.
   Or une unité d'aire est de 4 m^2 puisque l'unité du repère orthonormé est de 2 m.
   Finalement l'aire de creusement est bien donnée par $\mathscr{A} = 8\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. On fait fonctionner l'algorithme. Pour l'étape $k = 1$, on obtient :

$$R := \frac{2{,}5}{50} \times f\left(\frac{2{,}5}{50} \times 1\right) = 0,05 \times f(0{,}05) = 0{,}05 \times \ln(-2 \times 0{,}05^2 + 13{,}5) \approx 0,130116.$$

$$S := S + R = 0 + 0{,}130116 = 0{,}130116.$$

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

```
Variables
    R et S sont des réels
    n et k sont des entiers
Traitement
    S prend la valeur 0
    Demander la valeur de n
    Pour k variant de 1 à n faire
        R prend la valeur 2,5/n × f(2,5/n × k)
        S prend la valeur S + R
    Fin Pour
    Afficher S
```

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n=50$.

Initialisation	$S=0$ $n=50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	………	………
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	………
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	………	………
Affichage	$S=$ ………		

17MASSIN1 Page **8** sur **9**

Figure 41.1 – Annexe de l'exercice 41.6

On obtient alors le tableau suivant :

Initialisation	$S = 0$, $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	$0{,}05 f(0{,}05) = 0{,}130\,116$	0,130 116
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	0,519 981
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	$0{,}05 \times f(2{,}5) = 0$	$S + 0 = 5{,}197\,538$
Affichage	S = 5,197 538		

4. L'algorithme donne une valeur approchée par défaut de I et il est admis que :

$$a \leqslant I \leqslant a + \frac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$$

donc on obtient :

$$5{,}197538 \leqslant I \leqslant 5{,}197538 + \frac{\ln(13,5)}{50} \times 2,5 \Leftrightarrow 5{,}197538 \leqslant 5{,}197538 + 0{,}130135$$

et donc

$$5{,}197538 \leqslant I \leqslant 5{,}32767.$$

Or $\mathscr{A} = 8I$ donc

$$8 \times 5{,}197538 \leqslant 8 \times I \leqslant 8 \times 5{,}32767 \Leftrightarrow 41{,}583 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42{,}622.$$

Ainsi :

$$42 - 1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42 + 1.$$

Donc l'aire de creusement a une valeur approchée de 42 m^2, au mètre carré près.

□

41.8 Calcul approchée des solutions d'équations par la méthode de dichotomie

41.8.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 41.7. *Théorème des valeurs intermédiaires*
Soient I un intervalle, a et b dans I tels que $a < b$. Soit f une application *continue* sur l'intervalle I. Soit λ, un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

◊ *Démonstration du théorème 41.7.* Supposons $f(a) < f(b)$. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par l'algorithme suivant :

— Si le milieu m de l'intervalle $[a; b]$ est tel que $f(m) \geqslant m$ alors on pose $a_1 = a$ et $b_1 = m$.

— Sinon, on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b$.

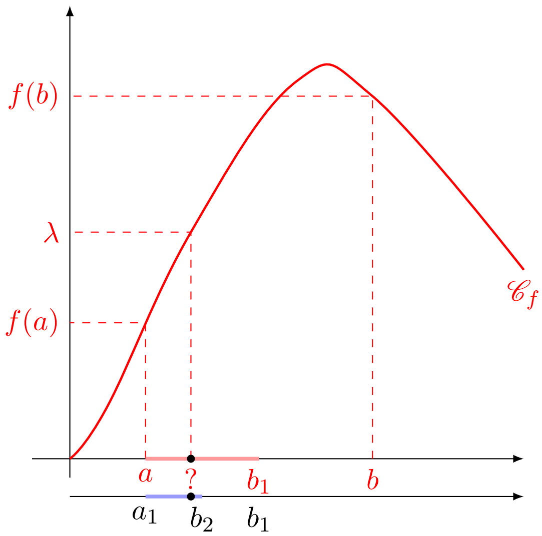
On recommence le découpage :

— Si le milieu m de l'intervalle $[a_1; b_1]$ est tel que $f(m) \geqslant \lambda$ alors on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = m$.

— Sinon, on pose $a_2 = m$ et $b_2 = b_1$.

On a ainsi :

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b \quad \text{et} \quad f(a_2) \leqslant \lambda \leqslant f(b_2).$$



En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite de segments emboîtés [1] :

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \cdots \supset [a_n;b_n] \supset \cdots.$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n;b_n]$ est $\dfrac{b-a}{2^n}$. Les segments $[a_n;b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune (ce réel c est dans l'intervalle $[a;b]$). Montrons que $f(c)=\lambda$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(b_n)$$

et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lambda \leqslant \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Or, f est continue en c donc :

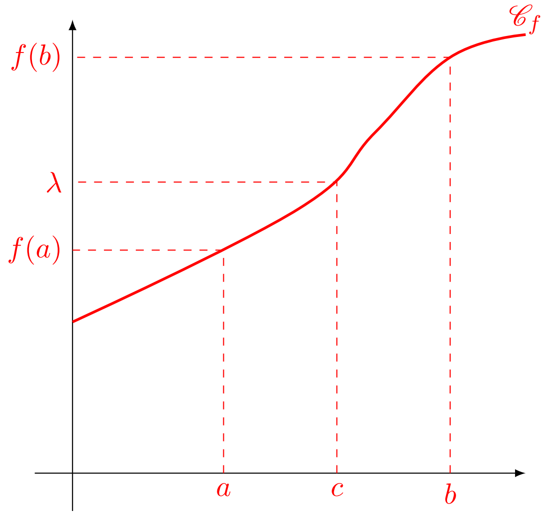
$$f(c) \leqslant \lambda \leqslant f(c)$$

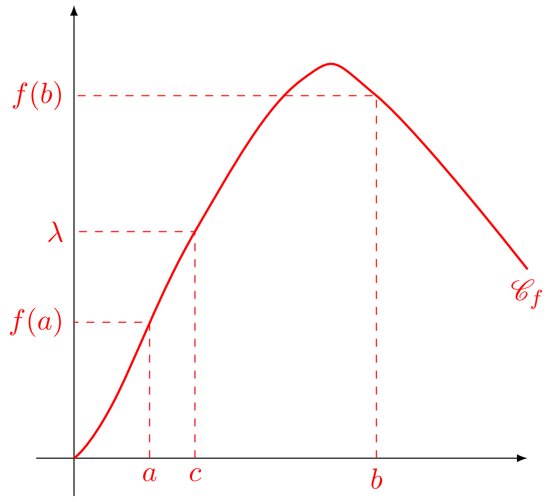
et ainsi $f(c)=\lambda$. On a bien montré qu'il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c)=\lambda$. □

Remarques 41.8.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f(x)=\lambda$ $(f(a)<\lambda<f(b))$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.
2. L'hypothèse de continuité est *indispensable* dans le théorème. Essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction « partie entière » avec $a=0$, $b=1$ et $\lambda=\dfrac{1}{2}\ldots$

1. Il s'agit d'une méthode de *dichotomie*.





Exemple 41.9.
Tout polynôme de polynôme P (à coefficients réels) de degré impair admet (au moins) une racine réelle. En effet, comme le degré de P est impair, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

En conséquence, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < a$, on ait $P(x) < 0$ et un réel $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > b$, on ait $P(x) > 0$. Comme P est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in]a; b[$ tel que $P(c) = 0$.

Remarque 41.10.
Le théorème des valeurs intermédiaires n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Considérer par exemple la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ x_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_0 \in [-1; 1].$$

On peut montrer (en exercice) que la fonction f est non continue en 0 et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. En effet, soient a et b deux réels avec $a < b$.

— Si a et b sont non nuls et de même signe, alors c'est immédiat (puisque dans ce cas f est continue sur $[a; b]$).
— Si $a = 0$ (et $b > 0$) alors on prend un réel λ compris entre $f(a) = x_0$ et $f(b)$. Comme $\lambda \in [-1; 1]$, on peut toujours trouver un réel $X \geqslant \dfrac{1}{b}$ tel que $\sin X = \lambda$. En posant $x = \dfrac{1}{X}$, il vient bien $f(x) = \lambda$ avec $x \in [a; b]$.
— On raisonne de même si on a un intervalle $[a; 0]$ ou $[a; b]$ lorsqu'il contient 0.

41.8.2 C'est plus, c'est moins !

L'utilisateur du programme choisit un nombre au hasard entre 1 et 100. Donner un algorithme qui permet à l'ordinateur de détecter le nombre choisi par l'utilisateur.

Pour cela, on va utiliser la méthode de dichotomie.

```
def plusmoins(n):
  a = 0
  b = 100
```

```
m = (a+b)/2
while m=! n:
  if m<n:
    a = m+1
    m = floor((a+b)/2)
  else
    b = m-1
    m = floor((a+b)/2)
return(m)
```

```
>>>plusmoins(80)
80
```

41.9 Cryptographie

D'après : BAC Nouvelle-Calédonie mars 2016, Exercice 4 Spé

▶ **Exercice 41.11.**
Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

A	1	G	7	L	12	Q	17	V	22
B	2	H	8	M	13	R	18	W	23
C	3	I	9	N	14	S	19	X	24
D	4	J	10	O	15	T	20	Y	25
E	5	K	11	P	16	U	21	Z	26
F	6								

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Par exemple :

— M correspond à $x = 12$

— $7 \times 12 + 5 = 89$

— Or $89 \equiv 11 \pmod{26}$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.
2. (a) Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x \pmod{26}$ alors $15k \equiv x \pmod{26}$.
   (b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
   (c) En déduire que $y \equiv 7x+5 \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 15y+3 \pmod{26}$.
3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre E.

Question subsidiaire : Proposer un algorithme qui permet de coder ou de décoder un message crypté de la façon proposée par l'énoncé. Pour cela, on pourra utiliser les instructions `ord` et `chr` :

```
>>> ord("A")
65
>>> chr(65)
'A'
```

◊ *Solution.* 1. La lettre L correspond à $x = 11$. On a alors : $7 \times 11 + 5 = 82$ qui a pour reste 4 dans la division euclidienne par 26. Le nombre 4 correspond à E donc la lettre L est codée E.

2. (a) Soit k un entier relatif ; $k \equiv 7x \pmod{26} \Rightarrow 15k \equiv 15 \times 7x \pmod{26}$. Or $15 \times 7 = 105 = 4 \times 26 + 1$ donc $105 \equiv 1 \pmod{26}$ et $105x \equiv x \pmod{26}$. Donc : $k \equiv 7x \pmod{26} \Rightarrow 15k \equiv x \pmod{26}$.

(b) Soit k un entier relatif ; $15k \equiv x \pmod{26} \Rightarrow 7 \times 15k \equiv 7x \pmod{26}$. Or on a vu que $7 \times 15 = 105 \equiv 1 \pmod{26}$ donc $105k \equiv k \pmod{26}$. Donc $15k \equiv x \pmod{26} \Rightarrow k \equiv 7x \pmod{26}$. On a donc démontré que :

$$15k \equiv x \pmod{26} \Leftrightarrow k \equiv 7x \pmod{26}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} y \equiv 7x + 5 \pmod{26} &\Leftrightarrow y - 5 \equiv 7x \pmod{26} \\ &\Leftrightarrow 15(y-5) \equiv x \pmod{26} \Leftrightarrow 15y - 75 \equiv x \pmod{26}. \end{aligned}$$

Or $-75 = 26 \times (-3) + 3$ donc $-75 \equiv 3 \pmod{26}$ et donc $15y - 75 \equiv 15y + 3 \pmod{26}$. On en déduit que $15y - 75 \equiv x \pmod{26} \Leftrightarrow 15y + 3 \equiv x \pmod{26}$ et donc que :

$$y \equiv 7x + 5 \pmod{26} \Leftrightarrow 15y + 3 \equiv x \pmod{26}.$$

3. D'après les questions précédentes, pour décoder une lettre, on cherche à quel nombre y elle correspond, puis on détermine x entre 0 et 25 tel que $y \equiv 7x + 25 \pmod{26}$ donc tel que $x \equiv 15y + 3 \pmod{26}$.
La lettre F correspond à $y = 5$; $15y + 3 = 78$ qui a pour reste 0 dans la division euclidienne par 26.
Le nombre 0 correspond à la lettre A donc le décodage de la lettre F donne la lettre A.

□

◊ *Algorithme de codage et décodage.* Fonction de codage :

```
def codage(mot):
  lmot=len(mot)
  code = str()
  for i in range(lmot):
    x = ord(mot[i])-65
    y = (7*x+5) % 26
    p = chr(y+65)
    code = code+p
  return code
```

Utilisation de la fonction `codage` :

```
>>> codage("L")
E
>>> codage("SALUT")
BFEPI
```

Fonction de décodage :

```
def decodage(mot):
  lmot=len(mot)
  decode = str()
  for i in range(lmot):
    x = ord(mot[i])-65
    y = (15*x+3) % 26
    p = chr(y+65)
    decode = decode+p
  return decode
```

Utilisation de la fonction `decodage` :

```
>>> decodage("F")
A
>>> decodage("BFEPI")
SALUT
```

□

LEÇON

42

Différents types de raisonnement en mathématiques.

Préambule

Niveau : seconde et terminale « Mathématiques Spécialité » (raisonnement par récurrence)

Prérequis : vocabulaire de la logique : assertion, implication, équivalence, quantificateurs, négation

Références :

[1] M.-C. David & B. Perrin-Riou, *Raisonnements*. URL : http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=B0151B82A7.4&+lang=fr&+module=U1%2Flogic%2Fdoclogic.fr.

[2] A. Bodin & al., *Exo7, Logique et raisonnements*. Exo7, URL : http://exo7.emath.fr/cours/ch_logique.pdf.

[3] C. Boulonne, *Notes de cours, M101 : Fondements de l'algèbre*. L1 Mathématiques, 2006-2007.

[4] D. René & al., *Les démonstrations mathématiques - Cours complet avec 127 exercices résolus*. Références sciences, Ellipses, 2017.

42.1 Introduction

La place de la logique et du raisonnement est très importante dans les programmes du secondaire. En effet, l'étude des formes diverses de raisonnement et la nécessité de distinguer implication et causalité sont essentielles à la formation mathématique.

Ainsi, les mathématiques vont permettent de distinguer le vrai du faux grâce à la mise en place d'une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour tous : il s'agit du raisonnement. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Reste à savoir quel type de raisonnement il faut mener pour arriver au résultat attendu.

42.2 Prérequis : logique

Extrait repris du cours « M101 : Fondements de l'algèbre » par C. Boulonne.
$\Diamond$

42.2.1 Opérateurs logiques

Définition 42.1. *Proposition*

Une *proposition* P est un énoncé mathématique qui peut être vrai (on note V, le fait que la proposition soit vraie) ou faux (on notera F, le fait que la proposition soit fausse).

Exemples 42.2.

1. La proposition $2 > 1$ est vraie.
2. La proposition $\pi \leqslant 3$ est fausse (pour rappel, π vaut approximativement $3,14156$).
3. La proposition $x^2 > 0$ est vraie si $x \neq 0$ et fausse sinon.

Définition 42.3. *Table de vérité*

Une *table de vérité* prend, en entrée les résultats des divers propositions et en sortie, les résultats des opérations logiques faites entre ces propositions.

Définition 42.4. *et*

Soient P et Q deux propositions. On dit que « P et Q » est une proposition vraie si et seulement si la proposition P est vraie et, en même temps, la proposition Q est vraie. On notera la proposition « P et Q », $P \wedge Q$.

La table ci-dessous représente la table de vérité du connecteur logique « et ».

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition 42.5. *ou*

Soient P et Q deux propositions, on dit que « P ou Q » est une proposition vraie si et seulement si l'une des deux propositions est vraie. On notera la proposition « P ou Q », $P \vee Q$.

La table ci-dessous représente la table de vérité du connecteur logique « ou ».

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 42.6.

Soient les propositions suivantes :

$$4^2 > 12 \qquad (P)$$

$$\sqrt{2} > 2 \qquad (Q)$$

La proposition P est vraie car $4^2 = 16$ mais, par contre, la proposition Q est fausse car $\sqrt{2}$ vaut approximativement 1,41. D'où $P \wedge Q$ est une proposition fausse et $P \vee Q$ est une proposition vraie.

Définition 42.7. *Négation*

On appelle *négation* d'une proposition P, le contraire de P. on note non P ou $\neg P$, la négation de P.

Exemple 42.8.

Soit la proposition suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2} \qquad (P)$$

Cette proposition est vraie, sa négation est :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2} \qquad (Q)$$

qui est, évidemment, fausse.

Définition 42.9. *Implication*
Soient P et Q deux propositions. On dit que P implique Q ($P \Rightarrow Q$) si la proposition « $\neg P \vee Q$ » est vraie.

Remarque 42.10.
Attention ! Si la proposition P est fausse alors l'implication est vraie.

La table ci-dessous nous donne la table de vérité de l'implication entre deux propositions.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition 42.11. *Hypothèse et conclusion*
Dans la définition 42.9, on dit que P est l'*hypothèse* dans l'implication et Q est la *conclusion*.

Exemples 42.12.
1. « Si $x \neq 0$ alors $x^2 > 0$ » est un énoncé vrai.
2. « Si $x > 0$ alors $x^3 > 0$ est un énoncé vrai.
3. « $1 \leqslant 0 \Rightarrow 2 < 1$ » est aussi un énoncé vrai car l'hypothèse « $1 < 0$ » est fausse.

Définition 42.13. *Équivalence*
Soient P et Q deux propositions. On dit que P et Q sont *logiquement équivalent* si P et Q ont simultanément même valeur de vérité (c'est-à-dire « vrai » ou « faux » en même temps).

La table ci-dessous nous donne la table de vérité de la relation « si et seulement si ».x

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 42.14.
La proposition « $x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0$ » est vraie.

Proposition 42.15. *Loi de non-contradiction*
Soit P une proposition. Alors $P \wedge \neg P$ est fausse.

Proposition 42.16. *Loi du tiers exclu*
Soit P une proposition. Alors $P \vee \neg P$ est vraie.

Proposition 42.17.
Soient P et Q deux propositions. On a alors :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Exemple 42.18.
Pour montrer le proposition « $x > 0$ si et seulement si $x^3 > 0$ », il faut montrer que « $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$ » et « $x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$.

Proposition 42.19. *Transitivité*
Soient P et Q deux propositions. Si la proposition « $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ ˇ est vraie alors la proposition « $P \Rightarrow R$ » est vraie.

Proposition 42.20. *Règle d'inférence*
Soient P et Q deux propositions. Si la proposition « $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ » est vraie alors Q est vraie.

Proposition 42.21. *Double négation*
Soit P une proposition. On a le résultat suivant :

$$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P.$$

On peut vérifier les règles logiques définies dans les propositions 42.15, 42.16, 42.17, 42.19, 42.20 et 42.21 à l'aide d'une table de vérité.

42.2.2 Quantificateurs

Définition 42.22. *Ensemble*
Un *ensemble* est une collection d'objets. Ces objets s'appellent les *éléments* de l'ensemble.

Définition 42.23. *Appartenance*
Si E est un ensemble et x un élément de E alors on dit que x *appartient* à E et on note $x \in E$.

Remarque 42.24.
On note $x \notin E$ si x n'appartient pas à E. C'est la négation de la proposition de l'appartenance à un ensemble ($\neg(x \in E)$).

Exemple 42.25.
On définit les ensembles de nombres suivants :

— $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

— $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs :

$$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

— $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{0, \frac{2}{3}, 1, \frac{9}{19}, \dots\right\}.$$

— $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels :

$$\mathbb{R} = \left\{-\sqrt{2}, 0, 2, \pi, \dots\right\}.$$

— $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

Exemple 42.26. *Appartenance*
L'élément 17 appartient à $\mathbb{N}$ car $17 \geqslant 0$. On peut ainsi écrire $17 \in \mathbb{N}$ et dire aussi que 17 appartient à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Par contre, -17 n'appartient pas à $\mathbb{N}$ car $-17 \geqslant 0$ mais il appartient à $\mathbb{Z}$.
$\frac{3}{4}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ mais il appartient à $\mathbb{Q}$.

Définition 42.27. *Quantificateur universel*
Soient E un ensemble et P une proposition. La proposition « $\forall x \in E$, P » veut dire que *tout élément* de E vérifie la proposition P.

Exemple 42.28.
La proposition « $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$ » est vraie (c'est la définition de l'ensemble $\mathbb{N}$).

Définition 42.29. *Quantificateur existenciel*
Soient E un ensemble et P une proposition. La proposition « $\exists x \in E$, P » veut dire qu'*il existe* un élément x de E qui vérifie P.

Exemple 42.30.
La proposition « $\exists x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$ est vraie. Sa traduction en langue française est : « il existe un x qui appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$ tel que x est strictement négatif. »

Remarque 42.31.
Il faut faire attention dans quel ordre on écrit les quantificateurs. La proposition :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \ \exists y \in \mathbb{Z}, \quad y > x$$

est vraie (on peut prendre $y = x + 1$) mais, par contre, la proposition

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \ \forall y \in \mathbb{Z}, \quad y < x$$

est fausse (on peut prendre $y = x$).

Proposition 42.32. *Négation des quantificateurs*
1. La négation du quantificateur universel est un quantificateur existenciel (c'est-à-dire que « $\neg\forall$ » correspond à un « $\exists$).
2. La négation du quantificateur existenciel est un quantificateur universel (c'est-à-dire que « $\neg\exists$ » correspond à un « $\forall$ »).

Exemples 42.33.
1. $\neg(\forall x \in E, \ P) \Leftrightarrow \exists x \in E, \ \neg P$;
2. $\neg(\exists x \in E, \ P) \Leftrightarrow \forall x \in E, \ \neg P$.

42.3 Raisonnement direct

Définition 42.34. *Raisonnement direct*
On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on veut montrer qu'alors Q est vraie. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée.

Remarque 42.35.
Dans le cas où P est fausse alors l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelque soit la valeur de vérité de Q.

Exemples 42.36.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

◊ *Résolutions.* 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisqu'un produit, une somme et une différence d'entiers naturels relatifs sont des entiers relatifs, on en déduit que $16n^2 - 48n + 33$ est un entier relatif.

D'autre part, on a l'égalité :

$$16n^2 - 48n + 33 = 4(2n-3)^2 - 3.$$

Puisque, $n \in \mathbb{Z}$, $2n - 3 \in \mathbb{Z}^*$ et donc $|2n - 3| \geqslant 1$. D'où $(2n-3)^2 \geqslant 1$. Il s'ensuit que l'on a

$$4(2n-3)^2 - 3 \geqslant 4 - 3 = 1.$$

Donc : $16n^2-48n+33 \in \mathbb{N}$. On a ainsi démontré que pour tout entier relatif n, $16n^2-48n+33 \in \mathbb{N}$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$. a et b s'écrivent :

$$a = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad b = \frac{p'}{q'} \; (p, p' \in \mathbb{Z} \text{ et } q, q' \in \mathbb{N}^*)$$

Maintenant :

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \dfrac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

□

42.4 Raisonnement par disjonction des cas (ou cas par cas)

Définition 42.37. *Raisonnement par disjonction des cas*

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E puis pour tous les x n'appartenant pas à A. C'est la *méthode de disjonction* ou du cas par cas.

Remarque 42.38.

Finalement, on partitionne E en $E = A \cup E \setminus A$.

Exemples 42.39.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

◊ *Résolutions.* 1.

1er cas a **ou** b est multiple de 3. Si $3 \mid a$ alors $3 \mid ab(a^2 - b^2)$ et si $3 \mid b$ alors $3 \mid ab(a^2 - b^2)$. Dans ce premier cas, l'assertion est vraie.

2e cas a **et** b ne sont pas multiples de 3. Tout entier naturel s'écrit sous la forme $3k$, $3k + 1$, $3k+2$ où $k \in \mathbb{N}$. Comme a et b ne sont pas multiples de 3, ils s'écrivent sous la forme $3k+1$ ou $3k - 1$ (qui revient à la forme $3k + 2$).

On peut alors montrer, en distinguant les cas, que $a^2 - b^2$ est divisible par 3.

— Si $a = 3k + 1$ et $b = 3k' + 1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$:

$$a^2 - b^2 = (3k + 1)^2 - (3k' + 1)^2 = 9(k^2 - k'^2) + 6(k - k') = 3(3(k^2 - k'^2) + 2(k - k')).$$

Donc $3 \mid a^2 - b^2$ et par suite, $3 \mid ab(a^2 - b^2)$.

— Si $a = 3k + 1$ et $b = 3k' - 1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$ ...

— Si $a = 3k - 1$ et $b = 3k' - 1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$ ...

— Si $a = 3k - 1$ et $b = 3k' + 1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$ ...

2.

1er cas $x \leqslant y$. Comme $x \leqslant y$, $x - y \leqslant 0$ et donc $|x - y| = -(x - y)$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = y$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

2e cas $x > y$. Comme $x > y$, $x - y > 0$ et donc $|x - y| = x - y$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + (x - y)) = x,$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

On conclut finalement que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Remarque 42.40.

On aurait pu prouver de la même manière que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

□

42.5 Raisonnement par contraposition

Définition 42.41. *Raisonnement par contraposition*

Le *raisonnement par contraposition* permet de démontrer qu'une implication de type $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Ce raisonnement est basé sur l'équivalence suivante :

l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

Exemples 42.42.

1. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que :

$$(\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ p \mid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) \Rightarrow (\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ p \mid a_k) \vee (\forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ p \mid b_i).$$

◊ *Résolutions.* 1. Prenons l'énoncé contraposé : $(a \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon)$. Ceci est immédiat. En effet, si on a $a \neq 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$ et $|a| > \frac{|a|}{2} = \varepsilon$.

2. Procédons par contraposée, ce qui donne à démontrer :

$$(\exists k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ p \nmid a_k) \wedge (\exists i,\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ p \nmid b_i) \Rightarrow (\exists k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ p \nmid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}).$$

Si p ne divise pas tous les a_k, soit r le premier indice tel que p ne divise pas a_r (donc p divise tous les précédents). De même, soit s le premier indice tel que p ne divise pas b_s. Alors p ne divise pas $a_0 b_{r+s} + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_{r+s} b_0$ puisqu'il divise tous ces termes sauf $a_r b_s$. On utilise la propriété qui nous dit qu'un nombre premier divise un produit de facteurs alors il divise l'un de ses facteurs. On a donc trouvé $k = r + s$ tel que p ne divise pas $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

□

42.6 Raisonnement par l'absurde

Définition 42.43. *Raisonnement par l'absurde*

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi, si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemples 42.44.

1. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f garde un signe constant strict sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On se donne $(n+1)$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0;1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

◊ *Résolutions.* 1. On veut prouver « f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ **ou** f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ ». Supposons que ce résultat soit faux. On suppose donc :

$$(\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) \leqslant 0) \quad \text{et} \quad (\exists b \in \mathbb{R},\ f(b) \geqslant 0).$$

Mais comme on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on est certain que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (et par conséquence $a \neq b$.

Ainsi f est continue sur le segment d'extrémités a et b et $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer l'existence d'un réel c tel que $f(c) = 0$. Ce qui est absurde car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par un raisonnement par l'absurde, on a montré que si f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors f garde un signe constant.

2. On veut montrer qu'il existe i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{1}{n}$. Supposons que ce résultat soit faux, c'est-à-dire montrons que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

On a :

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Ce qui est absurde car la longueur de l'intervalle ne peut excéder 1. La propriété initiale est donc vraie.

□

Remarque 42.45.

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde.

42.7 Raisonnement par utilisation d'un contre-exemple

Définition 42.46. *Contre-exemple*
Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que $P(x)$ est vraie.

Par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ ».

Exemples 42.47.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si ($f \geqslant 0$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$) alors f est identiquement nulle sur $[0;1]$.
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites qui n'admettent pas de limite alors la suite $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas de limite.

◊ *Solution.* 1. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]0;1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a bien $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mais f n'est pas identiquement nulle sur $[0;1]$.

2. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = (-1)^n$. Ces deux suites n'admettent pas de limites. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n = (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1.$$

Donc, la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et elle a pour limite 1.

□

42.8 Raisonnement par récurrence

Définition 42.48. *Principe de récurrence*
Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :

Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$ est vraie.

Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geqslant 0$ donné avec $P(n)$ vraie et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques 42.49.

1. Le principe de récurrence est basé sur la construction de $\mathbb{N}$. En effet, un des axiomes pour définir $\mathbb{N}$ est le suivant : « Soit A une partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et telle que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$, on a : $A = \mathbb{N}$. ».
2. La récurrence présentée ci-dessus est une récurrence dite simple mais il existe aussi des récurrences doubles, triples, etc. . . .

   Dans ce cas, par exemple pour une récurrence triple, les trois étapes deviennent :

   Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

   Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geqslant 3$ donné avec $P(n-3)$, $P(n-2)$ et $P(n-1)$ vraies et on démontre que l'assertion $P(n)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence triple, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsqu'on ne sait pas à l'avance combien de rangs il faut supposer vrais avant d'en déduire l'hérédité, on utilise le principe de récurrence forte. Dans l'étape 2 d'hérédité, on fixe $n \geqslant 0$ et on suppose que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(k)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie. Dans la conclusion, on invoque le principe de récurrence forte.

Exemples 42.50.

1. Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ \\ S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k. \end{cases}$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leqslant n!$ » est vraie.
2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions polynômes définie par :
$$\begin{cases} f_0(x) = 2 \\ f_1(x) = x \\ f_{n+2}(x) = x f_{n+1}(x) - f_n(x), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$.

◊ *Résolutions.* 1. On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leqslant n!$ » est vraie.

Initialisation $S_0 = 1 \leqslant 0! = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité Fixons $n \geqslant 0$. On suppose que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(k)$ est vraie et on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie :
$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k!$$
car, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $S_n \leqslant k!$, d'après l'hyp. de récurrence. D'où :
$$S_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}.$$
Or, $0 \leqslant k \leqslant n$, $(n-k)! \geqslant 1$, donc $\frac{1}{(n-k)!} \leqslant 1$. Il vient alors :
$$S_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant n! \sum_{k=0}^{n} 1 = n! \times n = (n+1).$$
Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion Par le principe de récurrence forte sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En exercice ! (utiliser la récurrence double)

□

42.9 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 42.51. *Raisonnement par analyse-synthèse*
Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de celle-ci (forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé). On raisonne par *analyse-synthèse.*

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution et on essaie d'en tirer le maximum de renseignement la concernant. Cette étape assure parfois *l'unicité.*

Synthèse : On reporte dans le problème la ou les solutions trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution au problème, puis une unique ou plusieurs. Cette étape assure *l'existence.*

Exemples 42.52.

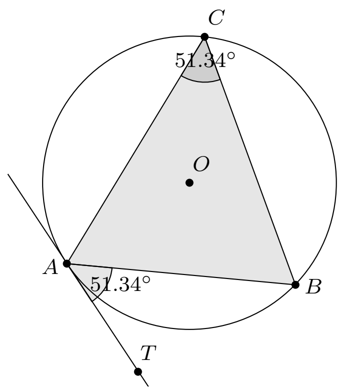
1. Montrer que toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une seule façon sous la forme $f = p + i$, où p est une fonction paire et i est une fonction impaire.
2. Recherche de lieu géométrique, par double inclusion.

Théorème 42.53. *Arc capable*
Soient A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$ fixés et $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$E_\theta = \left\{ M \in \mathscr{P} \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}.$$

(a) Si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ alors $E_0 = (AB) \setminus \{A, B\}$.

(b) Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ alors E_θ est le cercle passant par A et B, privé des points A et B, tangent à la droite (AT) en A où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$.



Démonstration. ♢

1. **Analyse :** Supposons qu'il existe une fonction p paire et i impaire telles que $f = p + i$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x).$$

Comme p est paire et i est impaire, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

On a donc :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}.$$

Par somme, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Par différence, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Pour l'instant, nous avons juste prouvé que si f se décompose sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire alors nécessairement p et i sont définies à partir de f comme précédemment. Elles sont donc uniques mais leur existence n'est pas encore démontrée.

Synthèse : Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définissons à partir de f deux fonctions p et i par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie que c'est bien une solution du problème posé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x),$$

p est donc bien une fonction paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x),$$

i est donc bien une fonction impaire. Ceci prouve qu'on a bien l'existence d'une solution et exactement d'une seule solution d'après la partie synthèse.

Conclusion : Par analyse-synthèse, on a démontré que pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un unique couple (p, i) tel que $f = p + i$ avec p est une fonction paire et i est une fonction impaire.

2. (a) immédiat

   (b)

Analyse : Soit $M \in \mathscr{P} \setminus \{A, B\}$ tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$. Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit (intersection des médiatrices) au triangle MAB. On a, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 2\theta \pmod{2\pi}.$$

Dans le triangle ABO, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Comme ABO est un triangle isocèle, on a que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

Autrement dit, la tangente au cercle en A fait un angle θ avec (AB). Donc M appartient au cercle passant par A et B de centre O, tangent à la droite (AT) en A, où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$. D'où $E_\theta \subset \mathscr{C} \setminus A, B$.

Synthèse : Réciproquement, soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$. On note $\theta' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. D'après ce qui précède,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta' \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

D'où $\theta = \theta'$ et $M \in E_\theta$. Ainsi, $\mathscr{C} \setminus \{A, B\} \setminus E_\theta$.

Finalement, $E_\theta = \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$.

□

42.10 Propositions de questions posées par le Jury

1. On estime à 1100000 le nombre d'habitants dans la métropole lilloise. On suppose que personne ne possède plus de 800000 cheveux sur sa tête. Que peut-on affirmer ?
2. Démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On pourra supposer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et définir l'ensemble $A = \left\{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}$.
3. Peut-on calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?
4. Existe-il $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ tel que $\alpha^\beta \in \mathbb{Q}$?
5. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que dans toute boite de n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur.

   Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$. On considère alors une boite de $(n+1)$ crayons de couleur, que l'on numérote de 1 à $n+1$. En enlevant le dernier crayon, on obtient une sous-boite qui, par hypothèse de récurrence, ne contient que des crayons de la même couleur. De même en enlevant le premier crayon. Les couleurs des deux sous-boites sont identiques, car il s'agit de la couleur des crayons communs aux deux sous-boites. D'où le résultat.

   Où est l'erreur ?

LEÇON
43

Exemples d'approche historique de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée.

PROPOSITION DE PLANS ET BIBLIOGRAPHIE

Préambule

Niveau : transversale

Prérequis : numération, résolution d'équations, arithmétique, géométrie, Théorème de Thalès, théorème de Pythagore, nombres complexes, suites numériques, fonctions, calcul intégral, probabilités, dénombrements, graphes et matrices.

Références :

[1] A. Dahan-Dalmédico & J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Points.

[2] Manuel Sesamath, *Sixième*, Magnard 2013. [url]

[3] C. Gressier, *Devoir de mathématiques n° 3, chiffres égyptiens et chiffres babyloniens*, Classe de Sixième. [url]

[4] Manuel Sesamath, *Terminales Maths Expertes*, Magnard 2020. [url]

[5] Lelivrescolaire.fr, *Manuel Maths Expertes Terminale.* [url]

[6] Manuel Sesamath, *Cycle 4*, Magnard 2016. [url]

[7] Contributeurs à Wikipedia, *Théorème de Pythagore*, Wikipédia, l'encyclopédie libre. [url]

[8] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Complémentaires*, Magnard 2020. [url]

[9] Lelivrescolaire.fr, *Manuel Maths Spécialité Terminale.* [url]

[10] M. Poncy & D. Vieudrin (al.), *Manuel Indice, Maths Terminale Spécialité*, Bordas Editeur, 2020.

[11] Lelivrescolaire.fr, *Manuel Maths Seconde.* [url]

[12] Manuel Sesamath, *Terminale Maths Spécialité*, Magnard 2020. [url]

43.1 Approche historique en algèbre et arithmétique

43.1.1 Numérations égyptiennes et babyloniennes

[3]

43.1.2 Opérations

[2 p 22]

43.1.3 Résolution d'équations

[5 p 14]

43.1.4 Détermination des nombres premiers

[4 p 134]

43.1.5 Équations diophantiennes

[5 p 88]

43.2 Approche historique en géométrie

43.2.1 Détermination du diamètre du Soleil et du rayon de la Terre

[6 p 311]

43.2.2 Quelques démonstrations du théorème de Pythagore

[7]

43.2.3 Nombres complexes et géométrie

[5 p 15]

43.3 Approche historique en analyse

43.3.1 Flocon de Van Koch

[10 p 152]

43.3.2 Critère de Cauchy

[12, 2 p 79]

43.3.3 Calcul intégral

[9 p 125]

43.3.4 Approche historique du logarithme

[8 p 93]

43.4 Approche historique dans d'autres domaines des mathématiques

43.4.1 Probabilités : le paradoxe du Duc de Toscane

[11, 96 p 319]

43.4.2 Dénombrements : le triangle de Pascal

[9 p 30]

43.4.3 Graphes : les ponts de Koningsberg

[5 p 172]

43.4.4 Introduction aux matrices

[5 p 173]

LEÇON

44

Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

Préambule

Niveau : lycée

Prérequis : fonctions, équations différentielles, fonctions exponentielles, logarithmes, congruences, graphes

Références :

[1] S. Hanneton, *Vitesse (d'un objet dans l'espace)*. URL : www.hanneton.org/temp/vitesse.pdf.

[2] J. Geadot, *Chapitre 5 : Le travail d'une force*. Classe de 1ère S. URL : http://www.physagreg.fr/accueil.php.

[3] Contributeurs de Wikipédia, *Principe de Hardy-Weinberg*. Wikipédia.

[4] G. Costantini, *Exercices sur les équations différentielles*. Terminale S. URL : http://bacamaths.net.

[5] A. Samier & C. Rasson, *Leçon sur les suites*. Leçon de Math S2, Master 1 Ens. Math, 2010-2011.

[6] J.-D. Astier & al., *Mathématiques, BEP Tertiaire*. Nathan Technique.

[7] J.-P. Quelen, *Petit théorème de Fermat et codage RSA*. 15 janvier 2011.

44.1 Démographie : fonction logistique

La fonction logistique est une famille de fonctions découverte par Verhulst. C'est une fonction de la forme :

$$t \mapsto f(t) = \frac{k}{1 + a\mathrm{e}^{-bt}}$$

avec

- t le temps ;
- $f(t)$ le nombre de personnes (bactéries, cellules) présentes au temps t ;
- $b > 0$, b dépend du taux de natalité et du taux de mortalité ($b = \alpha - \omega$, α naissance, ω mort)
- $k > 0$ dépend du type de population et de la contrainte liée au territoire (ou l'environnement) ;
- a provient de l'équation différentielle ($a > 0$) car en effet, ces fonctions sont des solutions à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = by\left(1 - \dfrac{y}{k}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases} .$$

Cette modélisation du développement d'une population est une amélioration de la modélisation faite par Malthus qui prenait comme équation différentielle : $y' = by$.

Cependant, cette modélisation n'est valable que si on considère que le territoire permet un développement infini (suivant la fonction exponentielle) de la population.

C'est pour cela que l'on ajoute la constante k que l'on peut aussi voir comme étant le nombre maximal de personnes qui peuvent vivre sur le territoire.

Résolution de l'équation différentielle. ◊ On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = by\left(1 - \dfrac{y}{k}\right) & (E) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

On pose $z = \dfrac{1}{y}$ (l'on peut car y représente un nombre de personnes qui ne peut jamais s'annuler).

$$(E) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{b}{z}\left(1 - \frac{1}{kz}\right) \Leftrightarrow z' = b\left(\frac{1}{k} - z\right) \quad (E')$$

Les solutions de (E') sont les fonctions du type $z : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-bt} + \dfrac{1}{k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ donc les solutions de (E) sont

$$y : t \mapsto \frac{1}{\lambda \mathrm{e}^{-bt} + \frac{1}{k}} = \frac{k}{\frac{\lambda}{k}\mathrm{e}^{-bt} + 1}.$$

On pose $a = \dfrac{\lambda}{k}$ donc $y(t) = \dfrac{k}{a\mathrm{e}^{-bt} + 1}$. De plus, $y(0) = y_0$ donc $y_0 = \dfrac{k}{a+1} \Rightarrow a = \dfrac{k}{y_0} - 1$.

Remarque 44.1.
$a > 0$ car $\dfrac{k}{y_0} > 1$ du fait que :

$$\begin{cases} k := \text{ population maximale} \\ y_0 := \text{ population initiale} \end{cases}$$

□

44.2 Médecine - SVT

44.2.1 Fonction de Gompetz

Cette fonction modélise la croissance des cellules d'une tumeur. Elle est de type :

$$t \mapsto x(t) = A\exp(k\exp(-at))$$

avec :

- x : biomasse
- t : temps
- A : taille maximale de la tumeur (10^{11})
- a : taux de croissance ($0,003\ \mathrm{j}^{-1}$)
- $k = \ln\left(\dfrac{x_0}{A}\right)$.

Cette fonction est la solution à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax\ln\left(\dfrac{A}{x}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Résolution de l'équation différentielle. ◊ On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax\ln\left(\dfrac{A}{x}\right) & (E) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Pour cela, on pose $y = \ln x$.

$$x' = ax\ln\left(\frac{A}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = A(\ln A - \ln x) \Leftrightarrow y' = a(\ln A - y) \quad (E')$$

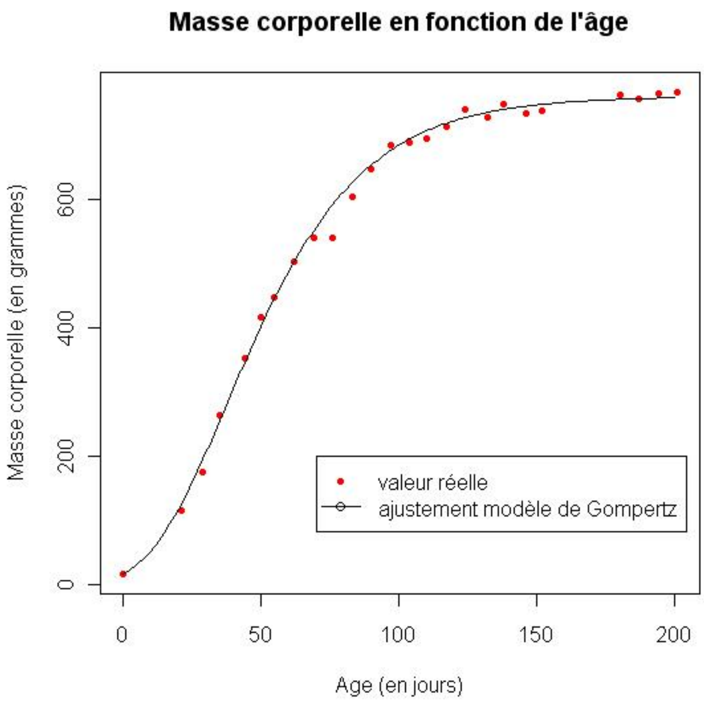
Les solutions de (E') sont :

$$y\colon t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at} + \ln A, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Les solution de (E) sont :

$$x\colon t \mapsto \exp(\lambda \mathrm{e}^{-at} + \ln A) = A\exp(\lambda\exp(-at)).$$

De plus, $x(0) = x_0$ donc $x_0 = A\mathrm{e}^{\lambda} \Rightarrow \lambda = \ln\left(\dfrac{x_0}{A}\right)$. □



44.2.2 Phénotype-génotype et probabilités

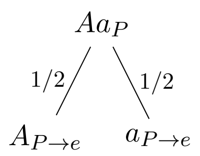
On a un gène avec 2 allèles : A et a. A est prédominant sur a. La transmission d'un allèle du parent à l'enfant est aléatoire.

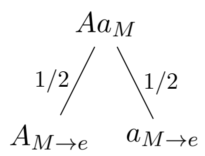
1. Déterminer la loi du génotype d'un enfant lorsque les deux parents ont pour génotype Aa.
2. On se place dans une population où les proportions des génotypes AA, Aa et aa sont respectivement p, q et r.
   (a) Sachant qu'un individu a le phénotype A, déterminer le loi de son génotype.
   (b) Même question avec un individu du phénotype aa.
   (c) Un enfant a 2 parents ayant le phénotype A, déterminer la loi de son phénotype.
   (d) Un enfant ayant 2 parents avec les phénotypes A et a, déterminer la loi de son phénotype.
   (e) Déterminer la loi du phénotype d'un enfant choisi au hasard.

Solution. ♢

1. On note :
   - AA_P : « le père a pour phénotype AA »
   - AA_M : « la mère a pour phénotype AA »
   - $A_{P\to e}$ « le père donne A à son enfant »
   - AA_e : « l'enfant a pour génotype AA ».

   Les dons des allèles sont indépendants.





$$P(AA_e) = P(A_{P\to e} \cap A_{M\to e}) = P(A_{P\to e}) \times P(A_{M\to e}) = \frac{1}{4}$$
$$P(aa_e) = P(a_{P\to e} \cap a_{M\to e}) = \frac{1}{4}$$
$$P(Aa_e) = P((A_{P\to e} \cap a_{M\to e}) \cup (A_{M\to e} \cap a_{P\to e})) = P(A_{P\to e} \cap a_{M\to e}) + P(A_{M\to e} \cap a_{P\to e}) = \frac{1}{2}.$$

2. Pour un individu quelconque :

géno	AA	Aa	aa
P	1/4	1/2	1/4

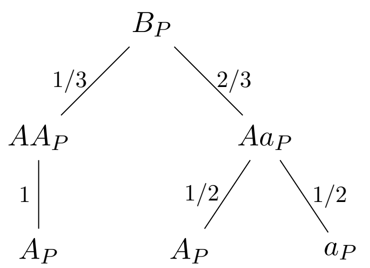
   (a) On note B : « individu du phénotype A »et b : « individu du phénotype a ».

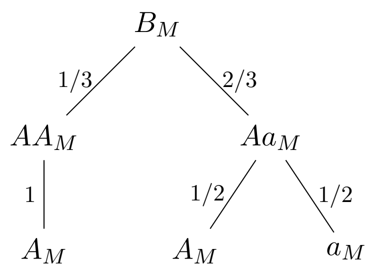
$$P(B) = P(AA \cup Aa) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P(b) = P(aa) = \frac{1}{4}.$$

$$P_B(AA) = \frac{P(AA \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \ ; \ P_B(aa) = 0 \ ; \ P_B(Aa) = \frac{2}{3}.$$

   (b) $P_B(AA) = 0$; $P_B(Aa) = 0$; $P_b(aa) = 1$.

   (c) On note B_P : « le père est du phénotype A ».





   Ici :

$$P(A_P) = \frac{2}{3} = P(A_M)$$
$$P(a_P) = \frac{1}{3} = P(a_M)$$
$$P(b_e) = P(a_P \cap a_M) = \frac{1}{9} \ ; \ p(B_e) = \frac{1}{9}.$$

(d)

$$\begin{array}{c} b_P \\ 1 \big| \\ aa_P \\ 1 \big| \\ a_P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} b_M \\ 1 \big| \\ aa_M \\ 1 \big| \\ a_M \end{array}$$

Si on a B_P et b_M :

$$P(b_e) = P(a_P \cap a_M) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Si on a b_P et B_M, on a :

$$P(b_e) = P(a_P \cap a_m) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(e) Pour cette question, on balaye les 6 cas possibles de génotypes :

$$(AA_P, AA_M),\ (Aa_P, AA_M),\ (aa_P, AA_M),\ (aa_P, Aa_M),\ (Aa_P, Aa_M),\ (aa_M, aa_P).$$

On peut construire l'arbre de probabilités (long à faire !).

$\square$

44.3 Cryptographie : système RSA

Le cryptage RSA (du nom des inventeurs, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman) est intéressant car la clé de cryptage est publique et il n'a donc pas de risques liés à l'envoi de la clé et au procédé de codage des données. Bob, comme tout le monde, peut crypter et envoyer un message. Par contre, seul la destinataire, Alice, qui connaît la clé privée correspondante pourra reconstituer le message initial.

Alice, la destinataire rend publique deux nombres n et c où n est le produit de deux grands nombres premiers p et q qu'elle est seule à connaître, où c est un entier premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ compris entre 2 et $(p-1)(q-1)$.

Pour coder le message « Bonjour », par exemple, on commence par remplacer les lettres par leurs positions dans l'ordre alphabétique, ce qui donne

$$02\ 15\ 14\ 10\ 15\ 21\ 18.$$

Si on utilise $n = 10573 = 97 \times 109$, on peut regrouper les chiffres par 4 sans risquer de dépasser n. Ce qui donne 0215 1410 1521 0018. Pour chaque nombre a de la série, on détermine alors b, reste de la division de a^c par n. On obtient alors dans ce cas avec $c = 5$ la série :

$$9131\ 7391\ 0690\ 7574.$$

C'est cette série de nombres qu'envoie Bob à Alice.

Alice qui connaît les deux facteurs premiers de n (ici $p = 97$ et $q = 109$) détermine alors facilement le nombre entier d vérifiant $1 < d < (p-1)(q-1)$ et tel que

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Ici $d = 6221$.

Alice peut alors retrouver la série initiale de nombres car, pour chaque entier b de cette série, on démontre de b^d est congru à a modulo n.

L'intérêt pour Alice est bien sûr d'avoir un nombre n produit de deux nombres premiers très grands de façon à ce que les calculateurs même les plus rapides ne puissent pas trouver en un temps suffisammment court les deux facteurs premiers nécessaires pour calculer d.

On note d'autre part que c et d jouent le même et sont interchangeables. Ainsi Alice peut décider de coder elle-même un message en utiliser sa clé privée $d = 6621$. Bob décryptera alors aisément ce message avec la clé publique c. Le message envoyé à Bob constitue en fait une signature du message d'Alice. En effet, si Bob réussit

à décrypter sans problème le message à l'aide de la clé c, c'est que ce message a été codé avec la clé privée d connue d'Alice seule et cela suffit pour en garantir l'authenticité.

On donne quelques propriétés permettant de justifier la robustesse de la méthode RSA.

Propriété 44.2.
Soient p et q deux nombres premiers. Si c, tel que $1 < c < (p-1)(q-1)$, est premier avec le produit $(p-1)(q-1)$ alors il existe un unique d tel que $1 < d < (p-1)(q-1)$ et vérifiant

$$cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1).}$$

Démonstration de la propriété 44.2. ♢ Si c et $(p-1)(q-1)$ sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $u_0 c + v_0(p-1)(q-1) = 1$. Par suite (u, v) est solution de

$$uc + v(p-1)(q-1) = 1$$

si et seulement si il existe un entier relatif k tel que

$$u = u_0 - k(p-1)(q-1) \quad \text{et} \quad v = v_0 + kc.$$

Soit donc k tel que u soit le plus petit des entiers positifs. Dans ces conditions

$$uc = 1 - v(p-1)(q-1) \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

et le nombre d recherché est par conséquent égal à u.

Il est unique car s'il en existait un autre, d', alors on aurait

$$c(d-d') \equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Comme c est premier avec $(p-1)(q-1)$, alors, d'après le théorème de Gauss,

$$d - d' \equiv 0 \pmod{(p-1)(q-1)}.$$

Mais comme on a $1 < d < (p-1)(q-1)$ et $1 < d' < (p-1)(q-1)$ et bien, on peut avoir que $d = d'$. □

Propriété 44.3.
Dans les conditions précédentes, si p et q sont différents et si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a \pmod{pq}$.

Démonstration de la propriété 44.3. ♢ Si $b \equiv a^c \pmod{pq}$ alors $b^d \equiv a^{cd} \pmod{pq}$ et $cd \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Il existe donc un entier $k \geqslant 0$ tel que $cd = 1 + k(p-1)(q-1)$. On obtient donc

$$a^{cd} = a\left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1}\right)^k.$$

Si a est divisible par p alors de façon évidente, $a^{cd} \equiv a \equiv 0 \pmod p$, sinon, d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ d'où $a^{cd} \equiv a \pmod p$. De même $a^{cd} \equiv a \pmod q$. Il existe donc deux entiers k et k' tels que $a^{cd} = a + kp$ et $a^{cd} = a + k'q$. Ainsi $kp = k'q$, entier qui se trouve donc être multiple de pq puisque p et q sont des nombres premiers différents. On obtient donc dans ces conditions $a^{cd} \equiv a \pmod{pq}$. □

44.4 Physique et équations différentielles

44.4.1 Désintégration des noyaux radioactifs

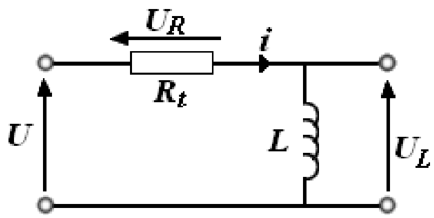
Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs dans le corps au temps t. On note λ la constante radioactive (t^{-1}), $t_{1/2}$ le temps tel que $N(t_{1/2}) = \frac{N_t}{2}$. Il existe un tableau donnant les temps de demi-vie ($t_{1/2}$) de tous les noyaux radioactifs. De plus $t_{1/2}$ et λ sont liés par $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$. N vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} N' = -\lambda N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

donc $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Application : datation au carbone 14 : $t_{1/2} = 5730$ ans.

44.4.2 Circuit RL



L'équation différentielle qui régit le circuit est la suivante :

$$U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_t.i$$

avec :

- U la tension aux bornes du montage, en V ;
- i l'intensité du courant électrique en A ;
- L l'inductance de la bobine en H ;
- R_t la résistance totale du circuit en Ω.

44.5 Économie d'entreprise

44.5.1 Théorie des graphes

Une entreprise doit respecter pour les mois de mai, juin et juillet, une commande de 2 chalets par mois.

L'entreprise peut stocker au maximum 2 chalets. Le stock coûte 60 € par chalet par mois.

L'entreprise peut construire un maximum de 4 chalets par mois. Le premier chalet coûte 1500 € pour sa construction mais les chalets suivants que l'on construit dans le même mois ne coûte que 500 € par chalet.

À la fin du mois du juillet, l'entreprise ne doit plus avoir de chalet en stock.

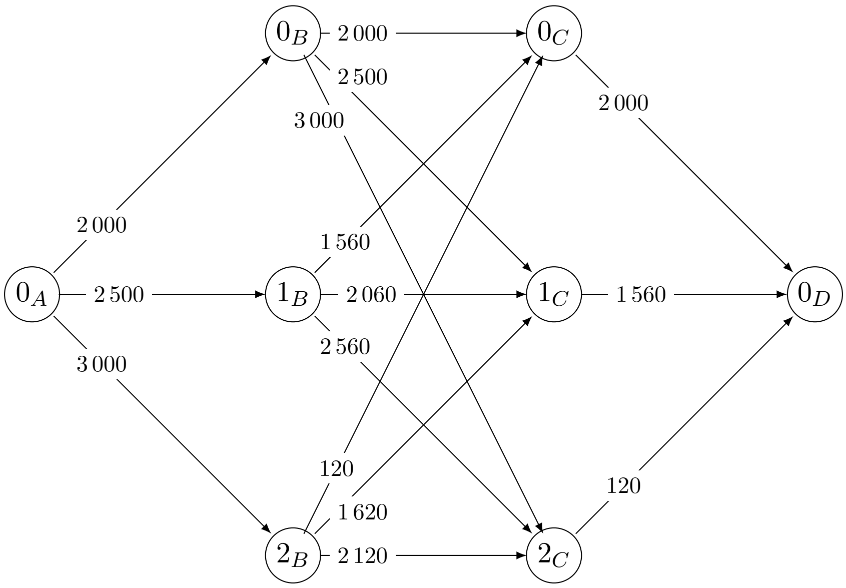
Comment faire pour minimiser les coûts ?

On utilise un graphe pondéré orienté pour visualiser la situation.

Les sommets représentent le nombre de chalets mis en stock.

Les indices A, B, C et D représentent « début de mai », « fin de mai », « fin de juin » et « fin de juillet ».

On pondère avec les coûts entre 2 mois (en comptant le stock sur le mois suivant).



On cherche la chaîne la plus courte, on utilise donc l'algorithme de Dijkstra pour la trouver :

0_A	0_B	1_B	2_B	0_C	1_C	2_C	0_D
0							
	2 000 (0_A)	2 500 (0_A)	3 000 (0_A)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
				3 120 (2_B)	4 500 (0_B)	5 000 (0_B)	
							5 120 (2_C)
							5 120 (0_C)

Il existe donc 2 chaînes de poids minimal :

$$0_A - 2_B - 0_C - 0_D \quad \text{et} \quad 0_A - 0_B - 2_C - 0_D.$$

Il y a donc deux possibilités :

- construire 4 chalets en mai, en stocker 2, ne rien construire en juin, en construire 2 en juillet.
- construire 2 chalets en mai, en construire 4 en juin, en stocker 2, ne rien construire en juillet.

44.5.2 Suite arithmético-géométrique

Une entreprise compte 220 000 employées. Cette entreprise veut diminuer le nombre d'employés et pour cela, elle ne remplace pas tous les départs à la retraite. L'objectif de l'entreprise est de diminuer de 45 000 le nombre de postes. Les départs à la retraite représentent 3% par an et l'entreprise fait 300 nouvelles embauches.

Quand l'entreprise atteindra-t-elle son objectif ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose u_n le nombre de personnes dans l'entreprise après n années. On a donc :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}97u_n + 300 \\ u_0 = 220\,000 \end{cases}$$

Ensuite, on résout classiquement : on pose $v_n = u_n - 10\,000$.

(la résolution est à faire en exercice !)